Jahresbericht

über

das Königliche Katholische Gymnasium in Conitz

in dem Schuljahre 1845—1846,

mit welchem

zu der öffentlichen Prüfung am 21. August

ergebenst einladet

der Director des Gymnasiums

Dr. F. Brüggemann.

Die Fünf- und Siebzehn-Theilung der Lemniskate. Vom Oberlehrer Wichert.

Conitz.
Gedruckt in der Buchdruckerei bei F. F. Harich.
1846.

Die

Fünf- und Siebzehn-Theilung

der

Lemniskate

von

A. Wichert.

Die Gleichung einer Lemniskate ist:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wo a die halbe Axe derselben bezeichnet und die rechtwinkligen Koordinaten x und y aus dem beiden Theilen der Curve gemeinschaftlichen Punkte A (siehe die Figur) gerechnet werden. Setzt man hier $x^2 + y^2 = z^2$ und $a^2 = 1$, so dass z, die Chorde, in Theilen der halben Axe ausgedrückt ist, so wird die Gleichung:

$$z^4 = x^2 - y^2 = 2\,x^2 - z^2 = z^2 - 2\,y^2$$

ferner $\quad x = z\sqrt{\frac{1+z^2}{2}},\quad y = z\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}$

$$dx = \frac{(1+2\,z^2)\,dz}{\sqrt{2\,(1+z^2)}} \qquad dy = \frac{(1-2\,z^2)\,dz}{\sqrt{2\,(1-z^2)}}$$

und daraus das Differential eines Bogens:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

und $\quad s = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{1+z^2}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$

ein elliptisches Integral, aus dessen Natur Abel im zweiten und dritten Bande des Crelleschen Journals für reine und angewandte Mathematik bewiesen hat, dass man mit Hülfe des Lineals und Zirkels allein die Peripherie einer Lemniskate in m gleiche Theile theilen kann, wo m die Form hat 2^n oder $2^n + 1$, und wo die letztere Zahl zu gleicher Zeit eine Primzahl sein muss.

Die dort aufgestellten allgemeinen Vorschriften sollen hier auf die Fünftheilung der Lemniskate angewendet werden, da der Weg, auf welchem man hiezu durch die Zerfällung der elliptischen Funktionen in imaginäre Theile gelangt, von grossem Interesse ist; für die Siebzehntheilung derselben Figur jedoch sollen die Werthe durch die Auflösung einer biquadratischen Gleichung angegeben werden, indem derselbe Weg wie dort zu grosse Rechnungsschwierigkeiten darbieten würde.

Da in Folgendem die Abelschen Bezeichnungen festgehalten werden sollen, so sei, um sie mit den Legendreschen zu vergleichen, $z = \sin\vartheta$ und $1 = -k^2$, und es wird dann:

$$\int_0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1+z^2}} = \int_0 \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\vartheta}}; \text{ und dieses } = \delta \;\ldots\; (3)$$

giebt z als Funktion von δ; so dass

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi\delta = \sin\vartheta = \sin \operatorname{am}\delta \\ \sqrt{1-z^2} &= f\delta = \sqrt{1-\varphi^2\delta} = \cos\vartheta = \cos\operatorname{am}\delta \\ \sqrt{1+z^2} &= F\delta = \sqrt{1+\varphi^2\delta} = \sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta} = \Delta\operatorname{am}\delta \end{aligned}\right\} \;\ldots\; (4)$$

ist. Hieraus folgt unmittelbar, wenn man an die Stelle des z setzt $z\sqrt{-1}$ oder $z\,i$

$$\varphi(\delta i) = i\,\varphi\delta,\; f(\delta i) = F\delta,\; \text{ und } F(\delta i) = f\delta \;\ldots\; (5)$$

Es sei ferner $\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{\omega}{2}$, so ist für $\varphi\frac{\omega}{2}$ . . $z = 1$ und für $\varphi\,\omega$ wird $z = o$.

Nach den Fundamentalformeln der Addition elliptischer Transcendenten:

$$\sin\operatorname{am}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\operatorname{am}\alpha\,\cos\operatorname{am}\beta\,\Delta\operatorname{am}\beta + \sin\operatorname{am}\beta\,\cos\operatorname{am}\alpha\,\Delta\operatorname{am}\alpha}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\alpha\,\sin^2\operatorname{am}\beta}.$$

$$\cos\operatorname{am}(\alpha+\beta) = \frac{\cos\operatorname{am}\alpha\,\cos\operatorname{am}\beta - \sin\operatorname{am}\alpha\,\sin\operatorname{am}\beta\,\Delta\operatorname{am}\alpha\,\Delta\operatorname{am}\beta}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\alpha\,\sin^2\operatorname{am}\beta}$$

$$\Delta\operatorname{am}(\alpha+\beta) = \frac{\Delta\operatorname{am}\alpha\,\Delta\operatorname{am}\beta - k^2\sin\operatorname{am}\alpha\,\sin\operatorname{am}\beta\,\cos\operatorname{am}\alpha\,\cos\operatorname{am}\beta}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\alpha\,\sin^2\operatorname{am}\beta}.$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\alpha+\beta) &= \frac{\varphi\alpha\, f\beta\, F\beta + \varphi\beta\, f\alpha\, F\alpha}{1+\varphi^2\alpha\,\varphi^2\beta.} \\ f(\alpha+\beta) &= \frac{f\beta\, f\alpha - \varphi\alpha\,\varphi\beta\, F\alpha\, F\beta}{1+\varphi^2\alpha\,\varphi^2\beta} \\ F(\alpha+\beta) &= \frac{F\alpha\, F\beta + \varphi\alpha\,\varphi\beta\, f\alpha\, f\beta}{1+\varphi^2\alpha\,\varphi^2\beta.}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (6)$$

wird mit Rücksicht auf die Formeln (5)

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\alpha+\beta i) &= \frac{\varphi\alpha\, f\beta\, F\beta + i\,\varphi\beta\, f\alpha\, F\alpha}{1-\varphi^2\alpha\,\varphi^2\beta.} \\ f(\alpha+\beta i) &= \frac{f\alpha\, F\beta - i\,\varphi\alpha\,\varphi\beta\, F\alpha\, F\beta}{1-\varphi^2\alpha\,\varphi^2\beta.} \\ F(\alpha+\beta i) &= \frac{F\alpha\, f\beta + i\,\varphi\alpha\,\varphi\beta\, f\alpha\, F\beta}{1-\varphi^2\alpha\,\varphi^2\beta.}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (7)$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Funktionen der imaginären Veränderlichen bekannt sind, wenn die der reellen es sind. Setzt man dann $\alpha = m\,\delta$ und $\beta = \mu\,\delta$, so geben dieselben Formeln (6) eine Methode $\varphi(m\,\delta)$, $f(m\,\delta)$, $F(m\,\delta)$, $\varphi(\mu\,\delta)$, $f(\mu\,\delta)$ und $F(\mu\,\delta)$ durch die einfachen Funktionen $\varphi\,\delta$, $f\,\delta$, $F\,\delta$ auszudrücken, wenn nur m und μ ganze Zahlen sind; und mit Hülfe der Gleichungen (7) kann man jede der Funktionen $\varphi(m+\mu i)\,\delta$, $f(m+\mu i)\,\delta$, $F(m+\mu i)\,\delta$ durch die 3 Grössen $\varphi\,\delta$, $f\,\delta$ und $F\,\delta$, oder auch nur durch eine derselben z. B. $\varphi\,\delta$ angeben.

Auch überzeugt man sich leicht, dass, wenn man in den Gleichungen (6) $\alpha = \beta$ setzt und so resp. $\varphi(2\,\alpha)$ $\varphi(3\,\alpha)$ $\varphi(4\,\alpha)$ . . . $\varphi(m\,\alpha)$ entwickelt, dieses rationale oder irrationale Funktionen von $\varphi^2\alpha$ sein werden, je nach dem m eine ungerade oder gerade Zahl ist, die noch in den Faktor $\varphi\,\alpha$ multiplizirt sind. Da die Gleichungen (7) mit ihnen gleichartig sind, so wird auch $\varphi(m+\mu i)\,\delta = \varphi\,\delta\,.\,T$ . . . . (8), wo T eine rationale Funktion von $\varphi^2\,\delta$ ist.

Verändert man δ in $\delta\,i$, so verändert sich $\varphi\,i\,\delta$ in $i\,\varphi\,\delta$ und es wird aus (8)

$$i\,\varphi\,(m+\mu i)\,\delta = i\,\varphi\,\delta\;T^1 \quad \ldots . \quad (9)$$

wo T^1 dieselbe Funktion von $-\varphi^2\,\delta$ wie T von $\varphi^2\,\delta$ sein muss. Man muss also

$T^1 = T$ . . . . . (10) haben, oder es kann die Funktion T nur die Quadrate von $\varphi^2\delta$ enthalten d. h. eine rationale Funktion von $\varphi^4\delta$ sein.

Wenn wir das bisher Gesagte für $\varphi(2+i)\delta$ entwickeln, so ist aus den Formeln (7), darin $\alpha = 2\delta$ und $\beta = \delta$ gesetzt,

$$\varphi(2+i)\delta = \frac{\varphi 2\delta\, f\delta\, F\delta + i\varphi\delta\, f2\delta\, F2\delta}{1 - \varphi^2\delta\, \varphi^2 2\delta} \;\ldots\ldots\; (11),$$

nach (6) aber ist

$$\left.\begin{aligned} \varphi 2\delta &= \frac{2\varphi\delta\, f\delta\, F\delta}{1+\varphi^4\delta} \\ f2\delta &= \frac{f^2\delta - \varphi^2\delta\, F^2\delta}{1+\varphi^4\delta} \\ F2\delta &= \frac{F^2(\delta) + \varphi^2\delta\, f^2\delta}{1+\varphi^4\delta} \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; (12)$$

und die Substitution dieser Ausdrücke in (11) giebt:

$$\varphi(2+i)\delta = \varphi\delta\, \frac{2 - 2\varphi^8\delta + i(1 - 6\varphi^4\delta + \varphi^8\delta)}{1 - 2\varphi^4\delta + 5\varphi^8\delta}$$

woraus, $\varphi\delta = x$ gesetzt und Zähler und Nenner mit $1 - (1 + 2i)x^4$ dividirt, folgt:

$$\varphi(2+i)\delta = xi\, \frac{1 - 2i - x^4}{1 - (1 - 2i)x^4} \;\ldots\ldots\; (13)$$

Eine ganz ähnliche Form erhält $\varphi(4+i)\delta$, die sich auch durch einen solchen imaginären Faktor vereinfachen lässt und dieselbe Relation der Coeffizienten in Zähler und Nenner hat.

Es lässt sich aber jede Zahl von der Form $4m + 1$ in die Summe zweier Quadrate auflösen*), so dass $4m + 1 = \alpha^2 + \beta^2$ gesetzt werden kann, oder $4m + 1 = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)$. Um zur Fünf- und Siebzehntheilung der Lemniskate zu gelangen, darf man also nur $\varphi\,\frac{\omega}{2+i}$, $\varphi\,\frac{\omega}{2-i}$ und $\varphi\,\frac{\omega}{4+i}$, $\varphi\,\frac{\omega}{4-i}$ entwickeln, oder auch nur die beiden ersten, da die beiden zweiten Funktionen sich aus den ersten ergeben, wenn man darin für $+i$ setzt $-i$.

---

*) Legendre theor. d. nombr. pag. 178.

Da ferner $4m+1$ eine ungerade Zahl ist, also auch $\alpha^2+\beta^2$, so muss $\alpha+\beta$ eben so eine sein, also in der Gleichung

$$\varphi(\alpha+\beta i)\delta = \varphi\delta.\frac{U}{V} \quad \ldots\ldots \text{(14)}$$

müssen, wie oben bemerkt, U sowohl wie V rationale Funktionen von $\varphi^4\delta$ sein. Auch wird in (14) $\varphi(\alpha+\beta i)\delta = 0$ werden für $\delta = \frac{\omega}{\alpha+\beta i}$, da $\varphi\omega = 0$; weil aber für diese Annahme $\varphi\frac{\omega}{\alpha+\beta i}$ nicht $= 0$ ist, so kann es nur U oder in (13) nur T sein d. h. die Wurzeln der Gleichung $U=0$ sind die Werthe für $\varphi\frac{\omega}{\alpha+\beta i}$. Man hat also aus (13), wo $\varphi\frac{\omega}{2+i} = x$ ist,

$$x^4 = 1-2i, \quad x^2 = \pm\sqrt{1-2i} \quad \ldots\ldots \text{(15)}$$

Es lässt sich aber auch beweisen, dass die zwei Wurzeln dieser Gleichung zugleich die Werthe der Ausdrücke $\varphi^2\left(\frac{\omega}{2+i}\right)$ und $\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2+i}\right)$ sind, oder dass die Gleichung (15) keine anderen Wurzeln haben kann, als $\pm\varphi\frac{\omega}{2+i}$ und $\pm\varphi\frac{2\omega}{2+i}$.

Es ist nämlich $\varphi(\alpha+\beta i)\delta = 0$, wenn man $(\alpha+\beta i)\delta = (m+\mu i)\omega$ oder $\delta = \frac{(m+\mu i)\omega}{\alpha+\beta i}$ setzt; oder, da diese Werthe nur für die Fünf- und Siebzehntheilung der Transcendente gebraucht werden, wenn $\delta = \frac{(m+\mu i)\omega}{\alpha+i}$ ist, wo α entweder 2 oder 4 bedeuten mag. Dann lässt sich immer

$$\frac{m+\mu i}{\alpha+i} = \frac{p}{\alpha+i} + k + k' i \quad \ldots\ldots \text{(16)}$$

setzen, wo k und k' und p ganze Zahlen sind; und es wird dann

$$\left.\begin{aligned} m &= p + \alpha k - k' \\ \mu &= k + k'\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(17)}$$

sein, woraus $p = m - \alpha\mu + (\alpha^2+1)\,k'$ . . . . . . (18)
und k' als irgend eine unbestimmte ganze Zahl sich immer so bestimmen lässt, dass p positiv oder negativ immer kleiner als $\frac{\alpha^2+1}{2}$ ist. Aber nach der bekannten Periodizität der elliptischen Transcendenten, wie sie sich aus (6) leicht ableiten lässt, und nach den Gleichungen (5) ist:

$$^{*)}\quad \varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+i}\right)\omega = \varphi\left\{\left(\frac{p}{\alpha+i}+k+k^1 i\right)\omega\right\} = -1^{k+k^1}\ \varphi\frac{p\,\omega}{\alpha+i}$$

$$= \varphi\left\{\pm\frac{p\,\omega}{\alpha+i}\right\}\ \ldots\ldots\ (19)$$

d. h. wir dürfen für die Einsetzung aller Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ nur die Werthe der ganzen Zahlen für p von $+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$ bis $-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$ brauchen, oder vielmehr von $+\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$ bis $-\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$, da $\alpha^2+\beta^2$ immer eine ungerade Zahl ist.

Die Werthe dieser Funktionen aber als die der Wurzeln der Gleichung sind auch unter sich verschieden, oder, da sie alle durch die Form:

$$x = \varphi\ \frac{p\,\omega}{\alpha+\beta i}\ \ldots\ldots\ (20)$$

ausgedrückt sind, es kann nie

$$\varphi\ \frac{p\,\omega}{\alpha+\beta i} = \varphi\ \frac{p^1\,\omega}{\alpha+\beta i}$$

sein; denn man kann nach dem Frühern immer

$$\frac{p^1\,\omega}{\alpha+\beta i} = (-1)^{m+n}\ \frac{p^1\,\omega}{\alpha+\beta i} + (m+n i)\,\omega$$

setzen; es müsste also

---

*) Crelle Journ. B. II. 109.

$$\frac{p\,\omega}{\alpha+\beta i} = (-1)^{m+n} \frac{p^1\,\omega}{\alpha+\beta i} + (m+n\,i)\,\omega \;\ldots\ldots\; (21)$$

sein, und dieses giebt, den zweiten Theil von (21) gleichnamig gemacht und die Zähler einander gleich gesetzt:

$$\left.\begin{cases} \beta m + n\,\alpha = 0 \\ p = (-1)^{m+n} p^1 + \alpha m - \beta n \end{cases}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (22)$$

Da m und n willkührliche ganze Zahlen sind, so können wir sie so wählen, dass aus der ersten der Gleichungen (22)

$$\left.\begin{aligned} n &= -\beta t \\ m &= \alpha t \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (23)$$

folgt, wo t noch eine ganze Zahl sein muss.

Aus dieser Relation lässt sich

$$p = (-1)^{m+n} p^1 + (\alpha^2+\beta^2)\,t$$

d. h. $$\frac{p \pm p^1}{\alpha^2+\beta^2} = t$$

leicht ableiten, was unmöglich ist, da p und p^1 immer kleiner als $\frac{\beta^2+\alpha^2}{2}$ und als ganze Zahlen angenommen wurden.

Es werden also diese verschiedenen Funktionen

$$\pm\,\varphi\,\frac{\omega}{\alpha+\beta i},\quad \pm\,\varphi\,\frac{2\,\omega}{\alpha+\beta i},\quad \varphi\,\frac{3\,\omega}{\alpha+\beta i}$$ etc. deren Anzahl

$\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$ ist, auch die Wurzeln von $U=0$ sein, wenn nachgewiesen ist, dass dieses keine gleichen Faktoren enthält.

Es war allgemein

$$\delta = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} \quad \text{und} \quad z = \varphi\,\delta$$

also $$d\,.\,\varphi\,\delta = dz = d\delta\,\sqrt{1-z^4} \quad \text{oder} \quad d\,.\,\varphi\,\delta = d\delta\,.\,f\delta\,.\,F\delta$$

Diese Gleichung substituirt in die Differential-Gleichung (19) und durch $d\delta$ dividirt giebt:

$$d\left(V \cdot \varphi\,(\alpha+\beta i)\,\delta\right) = d\,(\varphi\,\delta\,.\,U)$$

$$(\alpha+\beta i)\,.\,f(\alpha+\beta i)\,\delta\,.\,F(\alpha+\beta i)\,\delta\,.\,V + \frac{dV}{d\delta}\,\varphi\,(\alpha+\beta i)\,\delta$$

$$= f\delta\,.\,F\delta\,.\,U + \frac{dU}{d\delta}\,\varphi\,\delta.$$

Doch hat $U = 0$ nur dann gleiche Faktoren, wenn gleichzeitig $U = 0$ und $dU = 0$ ist; es müsste also in diesem Falle

$$(\alpha+\beta i)\,.\,f(\alpha+\beta i)\,\delta\,.\,F(\alpha+\beta i)\,.\,V + \frac{dV}{d\delta}\,\varphi\,(\alpha+\beta i)\,\delta = 0 \quad \ldots \quad (24)$$

sein. Da aber $\delta = \frac{\omega}{\alpha+\beta i}$ gesetzt war und $\varphi\,\omega = 0$ und $f\omega = F\omega = \pm 1$ ist, so muss aus (24) $V = 0$ sein oder U und V gleiche Faktoren enthalten, die wir aber in $\frac{U}{V}$ als nicht vorhanden voraussetzen dürfen; oder umgekehrt unter dieser Voraussetzung kann U keine gleichen Faktoren enthalten.

Um die Gleichung $U = 0$, deren Wurzeln die Werthe von

$$\varphi\,\frac{\omega}{\alpha+\beta i},\ \pm\,\varphi\,\frac{2\,\omega}{\alpha+\beta i},\ \ldots\ \pm\,\varphi\left\{\frac{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}}{\alpha+\beta i}\,\omega.\right\}$$

sind, mit Hülfe der Gaussschen Methode aufzulösen, sei ε eine primitive Wurzel von $\alpha^2+\beta^2$ oder unserer Primzahlen 5 und 17; dann wird immer

$$\overset{m}{\varepsilon} = \pm\,a_m + t\,(\alpha^2+\beta^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

gesetzt werden können, wo, wenn t eine ganze Zahl bedeutet, auch a_m eine solche ist und die verschiedenen Werthe ± 1, ± 2, ... bis $\pm\,\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$ haben kann, wenn man für m dieselben einsetzt.

Da nun auch

$$\left.\begin{aligned}\varphi\left(\varepsilon^{m}\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right) &= \varphi\left\{\pm a_m \frac{\omega}{\alpha+\beta i} + t\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta i}\right)\omega\right\}\\ &= \varphi\left\{\pm a_m \frac{\omega}{\alpha+\beta i} + t\,(\alpha-\beta i)\,\omega\right\}\\ &= \pm\,\varphi\left\{a_m \frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right\}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (26)$$

ist, so fallen die Werthe von

$$\pm\,\varphi\,\frac{\omega}{\alpha+\beta i},\ \pm\,\varphi\,\frac{2\,\omega}{\alpha+\beta i},\ \ldots\ \pm\,\varphi\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}\cdot\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right\}$$

mit den von

$$\pm\,\varphi\,\frac{\omega}{\alpha+\beta i},\ \pm\,\varphi\,\frac{\varepsilon\,\omega}{\alpha+\beta i},\ \pm\,\varphi\,\frac{\varepsilon^2\,\omega}{\alpha+\beta i}\ \ldots\ \varphi\left\{\varepsilon^{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}}\,\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right\}$$

allerdings in verschiedener Reihenfolge zusammen.

Es sei ferner ϑ irgend eine reelle oder imaginäre Wurzel der Gleichung

$$\vartheta^{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \vartheta^n - 1 = 0,$$

wo $n = \dfrac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$ ist, und, wenn $\dfrac{\omega}{\alpha+\beta i} = \delta$ wie früher gesetzt worden, werde durch $\psi\,\delta$ der Ausdruck

$$\varphi^2\,\delta + \varphi^2\,(\varepsilon\,\delta)\,.\,\vartheta + \varphi^2\,(\varepsilon^2\,\delta)\,.\,\vartheta^2\ \ldots\ \varphi^2\,(\varepsilon^{n-1}\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-1}$$

bezeichnet, so dass die Gleichung

$$\psi\,\delta = \varphi^2\,\delta + \varphi^2\,(\varepsilon\,\delta)\,.\,\vartheta + \varphi^2\,(\varepsilon^2\,\delta)\,.\,\vartheta^2 + \ldots + \varphi^2\,(\varepsilon^{n-1}\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-1}\ \ldots\ (27)$$

als eine ganze rationale Funktion von $\varphi^2\,\delta$ entwickelt werden kann, die wir auch unter der Form schreiben können:

$$\psi\,\delta = \chi\,[\varphi^2\,\delta];\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (28)$$

so lässt sich leicht beweisen, dass immer

$$(\psi\,\delta)^n = \left(\chi\,[\varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta)]\right)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Setzt man nämlich in den Ausdruck (27) $\varepsilon^m\,\delta$ für δ, so wird er:

$$\left.\begin{aligned}\psi\,(\varepsilon^m\,\delta) = {} & \varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta) + \varphi^2\,(\varepsilon^{m+1}\,\delta)\,.\,\vartheta + \varphi^2\,(\varepsilon^{m+2}\,\delta)\,.\,\vartheta^2 + \ldots \\ & + \varphi^2\,(\varepsilon^{n-1}\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-m-1} + \varphi^2\,(\varepsilon^n\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-m} + \\ & \ldots. + \varphi^2\,(\varepsilon^{n+m-1}\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-1};\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

es ist aber $\varphi^2\,(\varepsilon^{n+m}\,\delta) = \varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta)$, weil

$$\varepsilon^n = (\alpha^2 + \beta^2)\,t - 1 \quad \text{und} \quad \varepsilon^{n+m} = (\alpha^2 + \beta^2)\,t\,\varepsilon^m - \varepsilon^m$$

und deshalb können wir dem Ausdrucke (30) folgende Gestalt geben:

$$\left.\begin{aligned}\psi\,(\varepsilon^m\,\delta) = {} & \varphi^2\,\delta\,.\,\vartheta^{n-m} + \varphi^2\,(\varepsilon\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-m+1} + \varphi^2\,(\varepsilon^2\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-m+2} + \ldots \\ & \varphi^2\,(\varepsilon^{m-1}\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-1} + \varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta) + \varphi^2\,(\varepsilon^{m+1}\,\delta)\,.\,\vartheta + \\ & \ldots. + \varphi^2\,(\varepsilon^{n-1}\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-m-1}\end{aligned}\right\}$$

oder:

$$\begin{aligned}\psi\,(\varepsilon^m\,\delta) = \vartheta^{-m}\Big(& \varphi^2\,(\delta) + \varphi^2\,(\varepsilon\,\delta)\,.\,\vartheta + \varphi^2\,(\varepsilon^2\,\delta)\,.\,\vartheta^2 + \ldots\ldots \\ & \varphi^2\,(\varepsilon^{n-1}\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-1}\Big) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)\end{aligned}$$

da $\vartheta^n = 1$ ist;

d. h. $\psi\,(\varepsilon^m\,\delta) = \vartheta^{-m}\,(\psi\,\delta)$

und $$\psi\,\delta = \vartheta^m\,.\,\psi\,(\varepsilon^m\,\delta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Es ist aber $\psi\,(\varepsilon^m\,\delta)$ dieselbe Funktion von $\varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta)$ wie $\psi\,\delta$ von $\varphi^2\,\delta$, oder

$$\psi\,(\varepsilon^m\,\delta) = \chi\,[\varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta)]$$

also nach (32) $$\psi\,(\delta) = \vartheta^m\,\chi\,[\varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta)]$$

und dieses zur $n$ten Potenz erhoben giebt

$$(\psi \delta)^n = \left(\chi\,[\varphi^2\,(\varepsilon^m \delta)]\right)^n \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Setzt man in diese Gleichung für m der Reihe nach die ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . . $n-1$, so erhält man n Gleichungen und durch deren Addition wird

$$n(\psi \delta)^n = (\chi(\varphi^2 \delta))^n + [\chi(\varphi^2(\varepsilon \delta))]^n + [\chi(\varphi^2(\varepsilon^2 \delta))]^n + \ldots$$
$$\left(\chi\,[\varphi^2\,(\varepsilon^{n-1} \delta)]\right)^n \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

wo das zweite Glied eine rationale und zu gleicher Zeit symmetrische Funktion von den Ausdrücken $\varphi^2 \delta$, $\varphi^2(\varepsilon \delta)$, $\varphi^2(\varepsilon^2 \delta)$, ... $\varphi^2(\varepsilon^{n-1} \delta)$ ist, d. h. eine derartige Funktion sämmtlicher Wurzeln der Gleichung $U = 0$. Da sich dann sowohl die Produkte wie die Summen der Potenzen der Wurzeln durch die gegebenen Coeffizienten dieser Gleichung ausdrücken lassen, so ist $(\psi \delta)^n$ durch diese bekannten Grössen gegeben und es sei demnach

$$(\psi \delta)^n = v \quad \text{und} \quad \psi \delta = \sqrt[n]{v}.$$

Wir wollen nun die n verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\vartheta^n - 1 = 0$, von denen eine $\vartheta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ ist, mit 1, ϑ, ϑ^2, ϑ^3, ... ϑ^{n-1} bezeichnen, da dieselben mit ihren Potenzen zusammenfallen, und die verschiedenen Werthe der Funktion $\psi \delta$, wenn wir successive darin die Wurzeln ϑ, ϑ^2, ϑ^3, . . . ϑ^{n-1} setzen, mit $\sqrt[n]{v_1}$, $\sqrt[n]{v_2}$, $\sqrt[n]{v_3}$ . . . $\sqrt[n]{v_{n-1}}$ ausdrücken, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt[n]{v_1} &= \varphi^2 \delta + \vartheta \cdot \varphi^2(\varepsilon \delta) + \vartheta^2 \cdot \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \vartheta^3 \cdot \varphi^2(\varepsilon^3 \delta) \ldots \vartheta^{n-1} \cdot \varphi^2(\varepsilon^{n-1} \delta) \\
\sqrt[n]{v_2} &= \varphi^2 \delta + \vartheta^2 \cdot \varphi^2(\varepsilon \delta) + \vartheta^4 \cdot \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \vartheta^6 \cdot \varphi^2(\varepsilon^3 \delta) + \ldots \\
&\qquad \vartheta^{2n-2} \cdot \varphi^2(\varepsilon^{n-1} \delta) \\
\sqrt[n]{v_3} &= \varphi^2 \delta + \vartheta^3 \cdot \varphi^2(\varepsilon \delta) + \vartheta^6 \cdot \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \vartheta^9 \cdot \varphi^2(\varepsilon^3 \delta) + \ldots \\
&\qquad \vartheta^{3n-3} \cdot \varphi^2(\varepsilon^{n-1} \delta)
\end{aligned}\right\} (35)$$

$$\begin{rcases} \vdots \\ \sqrt[n]{v_{n-1}} = \varphi^2\delta + \vartheta^{n-1}\cdot\varphi^2(\varepsilon\delta) + \vartheta^{2n-2}\cdot\varphi^2(\varepsilon^2\delta) + \vartheta^{3n-3}\cdot\varphi^2(\varepsilon^3\delta)\ldots\ldots \\ \vartheta^{(n-1)^2}\varphi^2(\varepsilon^{n-1}\delta). \\ \text{und} \\ -p = \varphi^2\delta + \varphi^2(\varepsilon\delta) + \varphi^2(\varepsilon^2\delta) + \varphi^2(\varepsilon^3\delta) + \ldots\ \varphi^2(\varepsilon^{n-1}\delta) \end{rcases} (35)$$

von denen die letzte als die Summe sämmtlicher Wurzeln der Gleichung $U = 0$ dem negativen Coeffizienten p des zweiten Gliedes in derselben gleich ist.

Hieraus erhält man die einzelnen Werthe von $\varphi^2(\delta)$, $\varphi^2(\varepsilon\delta)$, $\varphi^2(\varepsilon^2\delta)$ etc. auf eine einfache Weise dadurch, dass man die Coeffizienten dieser Grössen in den verschiedenen Gleichungen $= 1$ macht und addirt, indem sowohl die Summe:

$1 + \vartheta + \vartheta^2 + \vartheta^3 + \ldots\ \vartheta^{n-1}$ als auch die Summen der positiven wie negativen Potenzen dieser Grössen vermöge der Gleichung $\vartheta^n - 1 = 0$ alle gleich 0 werden. Um $\varphi^2(\varepsilon^m\delta)$ zu erhalten, wird die erste dieser Gleichungen durch ϑ^m, die zweite durch ϑ^{2m}, die dritte durch ϑ^{3m} u. s. w. dividirt werden müssen; dann verschwinden durch die Addition sämmtliche Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ausser $\varphi^2(\varepsilon^m\delta)$ und es resultirt:

$$\varphi^2(\varepsilon^m\delta) = \frac{1}{n}\left\{-p + \vartheta^{-m}\sqrt[n]{v_1} + \vartheta^{-2m}\sqrt[n]{v_2} + \vartheta^{-3m}\sqrt[n]{v_3} + \ldots + \vartheta^{-(n-1)m}\sqrt[n]{v_{n-1}}\right\} \ldots\ldots \quad (36)$$

als diejenige Form, aus welcher die einzelnen Wurzeln sofort abgeleitet werden können, wenn man dem m die Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$ beilegt, und in der z. B. der Coeffizient von $\varphi^2(\varepsilon^k\delta)$ sein würde:

$$\vartheta^{k-m} + \vartheta^{2k-2m} + \vartheta^{3k-3m} + \ldots\ \vartheta^{(n-1)(k-m)} + 1,$$

weil $\vartheta^{(k-m)n} = 1$, der immer $= 0$ ist.

Es zeigt ferner die Gestalt der Gleichung (36), dass, wenn n von der Form ist $2^{\mu-1}$, d. h.

$$\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2} = 2^{\mu-1} \quad \text{oder} \quad \alpha^2+\beta^2 = 2^{\mu}+1$$

die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ nur von Quadratwurzeln abhängen.

Hat man so aus der Gleichung (36) die einzelnen Werthe von $\varphi^2\left\{\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right\}$, $\varphi^2\left\{\frac{2\omega}{\alpha+\beta i}\right\}, \ldots \varphi^2\left\{\frac{(n-1)\omega}{\alpha+\beta i}\right\}$ abgeleitet, so erhält man die entsprechenden für $\varphi^2\left\{\frac{\omega}{\alpha-\beta i}\right\}$, $\varphi^2\left\{\frac{2\omega}{\alpha-\beta i}\right\}, \ldots \varphi^2\left\{\frac{(n-1)\omega}{\alpha-\beta i}\right\}$, wenn man in dieselben für $+i$ setzt $-i$, und durch die Additionsformel der elliptischen Transcendenten somit den Werth für

$$\pm\varphi\left\{\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right\}, \text{ oder für } \pm\varphi\left\{\frac{2\alpha m\omega}{\alpha^2+\beta^2}\right\}.$$

Diese vorstehende Theorie der Division elliptischer Funktionen hat an der Fünftheilung der Lemniskate ihr einfachstes Beispiel. Es ist für dieselbe $\alpha=2$, $\beta=1$, $n=\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}=2$ und die Wurzeln der Gleichung $\vartheta^n-1=0$ sind hier $+1$ und -1.

Wir wollen nun $\varphi^2\left\{\frac{\omega}{2+i}\right\}=\alpha^2$ und, da von $\alpha^2+\beta^2$ oder 5 die primitive Wurzel $= 2$ ist, $\varphi^2\left\{\frac{2\omega}{2+i}\right\}=\alpha_{,}^2$ setzen, so wird nach (27)

$$\left.\begin{aligned} \psi\delta &= \alpha^2-\frac{\alpha^2(1-\alpha^4)}{(1+\alpha^4)^2} \\ \psi 2\delta &= \alpha_{,}^2-\frac{\alpha_{,}^2(1-\alpha_{,}^4)}{(1+\alpha_{,}^4)^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

und hieraus durch Substitution in die Gleichung (34) für die erste Wurzel $\vartheta=1$:

$$2(\psi\delta)^2 = \frac{\alpha^4(\alpha^8+6\alpha^4-3)^2}{(1+\alpha^4)^4}+\frac{\alpha_{,}^4(\alpha_{,}^8+6\alpha_{,}^4-3)^2}{(1+\alpha_{,}^4)^4} \quad \ldots \quad (38)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}2\,(\psi\,\delta)^2 = {} & \frac{(1+\alpha_{,}^4)^4\,(\alpha^{20}+12\,\alpha^{16}+30\,\alpha^{12}-36\,\alpha^8+9\,\alpha^4)}{[(1+\alpha^4)\,(1+\alpha_{,}^4)]^4} \\ & + \frac{(1+\alpha^4)^4\,(\alpha_{,}^{20}+12\,\alpha_{,}^{16}+30\,\alpha_{,}^{12}-36\,\alpha_{,}^8+9\,\alpha_{,}^4)}{[(1+\alpha^4)\,(1+\alpha_{,}^4)]^4.}\end{aligned}\right\}\cdot (39)$$

$$= \frac{Z}{N}$$

ein Ausdruck, in welchem Zähler und Nenner rationale und symmetrische Funktionen von α^2 und $\alpha_{,}^2$ oder von den Wurzeln der Gleichung $U = 0$ sind, die für unsern speziellen Fall schon als

$$\chi^4 - (1-2i) = 0$$

angegeben war und für welche ferner

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2+\alpha_{,}^2 &= 0 \\ \alpha^2\,\alpha_{,}^2 &= -(1-2i)\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (40)$$

ist.

Ordnet man aber die Gleichung (39) und zwar zuerst den Zähler nach den symmetrischen Verbindungen von α^2 und $\alpha_{,}^2$, so wird

$$\left.\begin{aligned}2\,N\,(\psi\,\delta)^2 = {} & \alpha^{20}+\alpha_{,}^{20}+12\,(\alpha^{16}+\alpha_{,}^{16})+30\,(\alpha^{12}+\alpha_{,}^{12}) \\ & -36\,(\alpha^8+\alpha_{,}^8)+9\,(\alpha^4+\alpha_{,}^4)+4\,\alpha^4\,\alpha_{,}^4 \\ & \big[\alpha^{16}+\alpha_{,}^{16}+12\,(\alpha^{12}+\alpha_{,}^{12})+30\,(\alpha^8+\alpha_{,}^8) \\ & -36\,(\alpha^4+\alpha_{,}^4)+18\big]+6\,\alpha^8\,\alpha_{,}^8\,\big[\alpha^{12}+\alpha_{,}^{12} \\ & +12\,(\alpha^8+\alpha_{,}^8)+30\,(\alpha^4+\alpha_{,}^4)-72+9\left(\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\alpha^4}\right)\big] \\ & +4\,\alpha^{12}\,\alpha_{,}^{12}\,\big[\alpha^8+\alpha_{,}^8+12\,(\alpha^4+\alpha_{,}^4)+60 \\ & -36\left(\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\alpha_{,}^4}\right)+9\left(\frac{1}{\alpha^8}+\frac{1}{\alpha_{,}^8}\right)\big]+\alpha^{16}\,\alpha_{,}^{16}\big[\alpha^4+\alpha_{,}^4 \\ & +24+36\,\left(\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\alpha_{,}^4}\right)-36\,\left(\frac{1}{\alpha^8}+\frac{1}{\alpha_{,}^8}\right) \\ & +9\left(\frac{1}{\alpha^{12}}+\frac{1}{\alpha_{,}^{12}}\right)\big]\end{aligned}\right\}\cdot\cdot (41),$$

oder

$$2N(\psi\delta)^2 = \left.\begin{array}{l}\alpha^{20} + \alpha_{,}^{20} + (\alpha^{16} + \alpha_{,}^{16})(12 + 4\alpha^4\alpha_{,}^4) + (\alpha^{12} + \alpha_{,}^{12}) \\ (30 + 57\alpha^4\alpha_{,}^4 + 6\alpha^8\alpha_{,}^8) + (\alpha^8 + \alpha_{,}^8)(-36 \\ + 146\alpha^4\alpha_{,}^4 + 36\alpha^8\alpha_{,}^8 + 4\alpha^{12}\alpha_{,}^{12}) + (\alpha^4 + \alpha_{,}^4) \\ (9 - 90\alpha^4\alpha_{,}^4 - 24\alpha^8\alpha_{,}^8 + 78\alpha^{12}\alpha_{,}^{12} + \alpha^{16}\alpha_{,}^{16}) \\ + 72\alpha^4\alpha_{,}^4 - 432\alpha^8\alpha_{,}^8 + 240\alpha^{12}\alpha_{,}^{12} + 24\alpha^{16}\alpha_{,}^{16}\end{array}\right\} \quad (42)$$

Aus den Gleichungen (40) ergiebt sich dieser Ausdruck als Funktion von $(\alpha^2\alpha_{,}^2)$ oder von $\alpha\alpha_{,}$; denn es ist

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^4 + \alpha_{,}^4 = -2\alpha^2\alpha_{,}^2 \\ \alpha^8 + \alpha_{,}^8 = 2\alpha^4\alpha_{,}^4 \\ \alpha^{12} + \alpha_{,}^{12} = -2\alpha^6\alpha_{,}^6 \\ \alpha^{16} + \alpha_{,}^{16} = 2\alpha^8\alpha_{,}^8 \\ \alpha^{20} + \alpha_{,}^{20} = -2\alpha^{10}\alpha_{,}^{10}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

und es verändert sich somit die Gleichung (42) in folgende:

$$\begin{aligned}2N(\psi\delta)^2 &= -2\alpha^{18}\alpha_{,}^{18} + 32\alpha^{16}\alpha_{,}^{16} - 168\alpha^{14}\alpha_{,}^{14} + 320\alpha^{12}\alpha_{,}^{12} \\ &\quad - 188\alpha^{10}\alpha_{,}^{10} - 96\alpha^8\alpha_{,}^8 + 120\alpha^6\alpha_{,}^6 - 18\alpha^2\alpha_{,}^2, \\ &= -2\alpha^2\alpha_{,}^2(\alpha^{16}\alpha_{,}^{16} - 16\alpha^{14}\alpha_{,}^{14} + 84\alpha^{12}\alpha_{,}^{12} \\ &\quad - 160\alpha^{10}\alpha_{,}^{10} + 94\alpha^8\alpha_{,}^8 + 48\alpha^6\alpha_{,}^6 - 60\alpha^4\alpha_{,}^4 + 9)\end{aligned}$$

oder

$$(\psi\delta)^2 = -\frac{\alpha^2\alpha_{,}^2(\alpha^8\alpha_{,}^8 - 8\alpha^6\alpha_{,}^6 + 10\alpha^4\alpha_{,}^4 - 3)^2}{N.} \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

Auf eine ganz analoge Weise erhält man aus (27) und (34) für die zweite Wurzel $\vartheta = -1$ den Ausdruck:

$$2(\psi_{,}\delta)^2 = \frac{\alpha^4(\alpha^8 + 6\alpha^4 - 3)^2}{(1+\alpha^4)^4} - \frac{\alpha_{,}^4(\alpha_{,}^8 + 6\alpha_{,}^4 - 3)^2}{(1+\alpha_{,}^4)^4}$$

oder

$$2(\psi_{,}\delta)^2 = \left.\begin{array}{l}\dfrac{(1+\alpha^4)^4(\alpha^{20} + 12\alpha^{16} + 30\alpha^{12} - 36\alpha^8 + 9\alpha^4)}{[(1+\alpha^4)(1+\alpha_{,}^4)]^2} \\ -\dfrac{(1+\alpha_{,}^4)^4(\alpha_{,}^{20} + 12\alpha^{16} + 30\alpha_{,}^{12} - 36\alpha_{,}^8 + 9\alpha_{,}^4)}{[(1+\alpha^4)(1+\alpha_{,}^4)]^2}\end{array}\right\} \quad (45)$$

in dem sich eben so Zähler und Nenner als symmetrische und rationale Funktionen

von α^2 und $\alpha,^2$ oder den Wurzeln der Gleichung $U = 0$ darstellen lassen. Es wird nämlich nach ähnlicher Weise geordnet die Gleichung (45):

$$\left.\begin{aligned} 2N(\psi,\delta)^2 = (\alpha^{20}+\alpha,^{20}) + (\alpha^{16}+\alpha,^{16})\,(4\,\alpha^4\alpha,^4 - 4) + (\alpha^{12}+\alpha,^{12}) \\ (14 + 9\,\alpha^4\alpha,^4 + 6\,\alpha^8\alpha,^8) + (\alpha^8+\alpha,^8)\,(-20 + 156\,\alpha^4\alpha,^4 \\ -44\,\alpha^8\alpha,^8 + 4\,\alpha^{12}\alpha,^{12}) + (\alpha^4+\alpha,^4)\,(25 + 70\,\alpha^4\alpha,^4 \\ +4\,\alpha^8\alpha,^8 - 2\,\alpha^{12}\alpha,^{12} + \alpha^{16}\alpha,^{16}) + 200\,\alpha^4\alpha,^4 \\ -240\,\alpha^8\alpha,^8 + 112\,\alpha^{12}\alpha,^{12} - 8\,\alpha^{16}\alpha,^{16} \end{aligned}\right\} (46)$$

und, wenn man die Summen der Potenzen von α^2 und $\alpha,^2$ aus den Gleichungen (43) substituirt:

$$2N(\psi,\delta)^2 = -2\,\alpha^{18}\alpha,^{18} - 8\,\alpha^{14}\alpha,^{14} + 32\,\alpha^{12}\alpha,^{12} - 28\,\alpha^{10}\alpha,^{10} + 64\,\alpha^8\alpha,^8 - 168\,\alpha^6\alpha,^6 + 160\,\alpha^4\alpha,^4 - 50\,\alpha^2\alpha,^2$$

oder

$$(\psi,\delta)^2 = -\frac{\alpha^2\alpha,^2\,(\alpha^8\alpha,^8 + 2\,\alpha^4\alpha,^4 - 8\,\alpha^2\alpha,^2 + 5)^2}{N} \ldots\ldots (47)$$

Für den Nenner N leitet man aber:

$$\left.\begin{aligned} N &= [(1+\alpha^4)\,(1+\alpha,^4)]^4 = (1+\alpha^4+\alpha,^4+\alpha^4\alpha,^4)^4 \\ &= (1 - 2\,\alpha^2\alpha,^2 + \alpha^4\alpha,^4)^4 = (1-\alpha^2\alpha,^2)^8 \end{aligned}\right\} \ldots (48)$$

ab, und es ist somit aus der Verbindung von (44), (47) und (48)

$$\left.\begin{aligned} \varphi^2\left\{\frac{\omega}{2+i}\right\} + \varphi^2\left\{\frac{2\,\omega}{2+i}\right\} = \psi\delta = i\,\frac{\alpha\alpha,\,(\alpha^8\alpha,^8 - 8\,\alpha^6\alpha,^6 + 10\,\alpha^4\alpha,^4 - 3)}{(1-\alpha^2\alpha,^2)^4} \\ \varphi^2\left\{\frac{\omega}{2+i}\right\} - \varphi^2\left\{\frac{2\,\omega}{2+i}\right\} = \psi,\delta = i\,\frac{\alpha\alpha,\,(\alpha^8\alpha,^8 + 2\,\alpha^4\alpha,^4 - 8\,\alpha^2\alpha,^2 + 5)}{(1-\alpha^2\alpha,^2)^4} \end{aligned}\right\} (49)$$

und hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^2\left\{\frac{\omega}{2+i}\right\} &= \frac{i\,\alpha\alpha,\,(1 - \alpha^2\alpha,^2 + 6\,\alpha^4\alpha,^4 - 4\,\alpha^6\alpha,^6 + \alpha^8\alpha,^8)}{(1-\alpha^2\alpha,^2)^4} = i\,\alpha\,\alpha, \\ \varphi^2\left\{\frac{2\,\omega}{2+i}\right\} &= -\frac{4\,i\,\alpha\alpha,\,(1 - \alpha^2\alpha,^2 - \alpha^4\alpha,^4 + \alpha^6\alpha,^6)}{(1-\alpha^2\alpha,^2)^4} \\ &= -\frac{4\,i\,\alpha\,\alpha,\,(1+\alpha^2\alpha,^2)}{(1-\alpha^2\alpha,^2)^2} \end{aligned}\right\} . (50)$$

Dieselben Werthe von $\varphi^2\left\{\frac{\omega}{2+i}\right\}$ und $\varphi^2\left\{\frac{2\,\omega}{2+i}\right\}$ hätten wir eben so schon

aus der Gleichung $x^4 = (1-2i)$ ableiten können, sollte diese Auflösung derselben nicht als Beispiel der oben gegebenen Methode dienen; denn es ist daraus:

$$x^2 = \varphi^2 \left\{\frac{\omega}{2+i}\right\} = \sqrt{1-2i} = i\sqrt{2i-1}$$

$$\text{und} \quad x^2 = \varphi^2 \left\{\frac{2\omega}{2+i}\right\} = \quad -i\sqrt{2i-1}$$

wo man den zweiten dieser Ausdrücke in den Gleichungen (50) wieder findet, wenn man in $\varphi^2 \left\{\frac{2\omega}{2+i}\right\}$ für $\alpha^2 \alpha_i^2$ den Werth $\sqrt{2i-1}$ setzt. Hierdurch wird gleichzeitig den Relationen der elliptischen Transcendenten und den der Wurzeln einer Gleichung Genüge geleistet, und es ist endlich:

$$\left.\begin{aligned} \varphi\,\frac{\omega}{2+i} &= \sqrt[4]{1-2i} \\ \varphi\,\frac{2\omega}{2+i} &= i\sqrt[4]{1-2i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Verwandeln wir aber i in $-i$, so ergeben sich daraus die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi\,\frac{\omega}{2-i} &= \sqrt[4]{1+2i} \\ \varphi\,\frac{2\omega}{2-i} &= -i\sqrt[4]{1+2i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Nach den Grundformeln (6) der elliptischen Funktionen aber ist:

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2+i} + \frac{\omega}{2-i}\right) = \frac{\varphi\,\frac{\omega}{2+i}\sqrt{1-\varphi^4\left(\frac{\omega}{2-i}\right)} + \varphi\,\frac{\omega}{2-i}\sqrt{1-\varphi^4\,\frac{\omega}{2+i}}}{1+\varphi^2\left(\frac{\omega}{2+i}\right)\cdot\varphi^2\left(\frac{\omega}{2-i}\right)}$$

oder, die Werthe aus (51) und (52) substituirt:

$$\varphi\,\frac{4\omega}{5} = \frac{\sqrt[4]{1-2i}\,\sqrt{-2i} + \sqrt[4]{1+2i}\,\sqrt{2i}}{1+\sqrt{5}}$$

Es ist jedoch $\sqrt{-2i} = 1-i$ und $\sqrt{2i} = 1+i$, so dass

$$\varphi\,\frac{4}{5}\,\omega = \frac{(1-i)\sqrt[4]{1-2i} + (1+i)\sqrt[4]{1+2i}}{1+\sqrt{5}} \quad \ldots\ldots (53)$$

und hieraus, weil

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[4]{1-2i} &= \sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}} \\ \sqrt[4]{1+2i} &= \sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}} \end{aligned}\right\} \ldots (54)$$

ist, folgt:

$$\left.\begin{aligned} \varphi\,\frac{4}{5}\,\omega &= \frac{2}{1+\sqrt{5}}\left\{\sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}}\right\} \\ &= \frac{2}{1+\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \end{aligned}\right\} \ldots (55)$$

Ganz auf dieselbe Weise giebt uns die Gleichung:

$$\varphi\left(\frac{2\omega}{2+i} + \frac{2\omega}{2-i}\right)$$

$$= \frac{\varphi\,\frac{2\omega}{2+i}\sqrt{1-\varphi^4\left(\frac{2\omega}{2-i}\right)} + \varphi\,\frac{2\omega}{2-i}\sqrt{1-\varphi^4\left(\frac{2\omega}{2+i}\right)}}{1+\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2+i}\right)\cdot\varphi^2\,\frac{2\omega}{2-i}}$$

für die aus (52) und (54) substituirten Werthe

$$\varphi\,\frac{8\omega}{5} = \frac{i(1-i)\sqrt{1-2i} - (i+1)\sqrt{1+2i}}{1+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{1+\sqrt{5}}\left\{\sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}}\right\}$$

$$= \frac{2}{1+\sqrt{5}} \sqrt{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Die beiden Ausdrücke für $\varphi\,\frac{4\omega}{5}$ und $\varphi\,\frac{8\omega}{5}$, die mit siebenstelligen Logarithmen berechnet resp. 0,52047 und 0,933522 geben, entsprechen auch der Relation der elliptischen Funktionen, dass

$$\left.\begin{aligned} \varphi\,\frac{8\omega}{5} &= \frac{2\,\varphi\,\frac{4\omega}{5}\sqrt{1-\varphi^4\,\frac{4\omega}{5}}}{1+\varphi^4\,\frac{4\omega}{5}} \\ \varphi\,\frac{4\omega}{5} &= \frac{2\,\varphi\,\frac{8\omega}{5}\sqrt{1-\varphi^4\,\frac{8\omega}{5}}}{1+\varphi^4\,\frac{8\omega}{5}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

ist. Nun war $\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$, oder der halbe Bogen des Zweiges der Lemniskate für die positive halbe Axe und z die Chorde dieses Bogens als Funktion derselben $= 1$, d. h. $z = \varphi\,\frac{\omega}{2} = 1$; dagegen für diesen ganzen Zweig war $z = \varphi\,\omega = 0$. Es werden also für diesen Theil der Curve, wenn wir die halbe Axe a zurück substituiren, die Werthe dieser Chorden AB, AC, AD, AE, bezeichnen wir sie resp. mit z_1, z_2, z_3, z_4, die der Funktionen $\varphi\,\frac{\omega}{5}$, $\varphi\,\frac{2\omega}{5}$, $\varphi\,\frac{3\omega}{5}$, $\varphi\,\frac{4\omega}{5}$ sein, und also:

$$\left.\begin{aligned} z_1 = z_4 &= \frac{2a}{1+\sqrt{5}} \sqrt{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \\ z_2 = z_3 &= \frac{2a}{1+\sqrt{5}} \sqrt{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

Ausdrücke, die, wie man leicht sieht, sich durch Zirkel und Lineal allein construiren lassen, da sie nur von Quadratwurzeln abhängen.

Nimmt man aber auch den Zweig für die negative halbe Axe ($-a$) hinzu, so ergeben sich aus der Periodizität der elliptischen Transcendenten so wie aus der Relation von (57) für die Fünftheilung der ganzen Figur die Chorden AC, AE, AI, AG und deren Werthe als folgende:

$$\left.\begin{aligned} AC &= \frac{2a}{1+\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}, \quad AI = \frac{-2a}{1+\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \\ AE &= \frac{2a}{1+\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}, \quad AG = \frac{-2a}{1+\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

und somit die vollständige Lösung der Aufgabe.

Für die Siebzehntheilung derselben Curve geben die Formeln (7), darin $\alpha = 4\delta$ und $\beta = i\delta$ gesetzt:

$$\varphi\,(4+i)\,\delta = \frac{\varphi 4\delta\sqrt{1-\varphi^4 i\delta} + \varphi i\delta\sqrt{1-\varphi^4 4\delta}}{1-\varphi^2 4\delta\,.\,\varphi^2\delta} \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

Um diesen Ausdruck als Funktion von $\varphi\delta$ zu entwickeln, benutzen wir die Gleichungen (12), nach welchen

$$\varphi\,4\delta = \frac{2\varphi 2\delta\sqrt{1-\varphi^4 2\delta}}{1+\varphi^4 2\delta} \text{ und } \varphi 2\delta = \frac{2\varphi\delta\sqrt{1-\varphi^2\delta}}{1+\varphi^4\delta}$$

ist; und hieraus wird, $\varphi\delta = x$ und $\varphi 4\delta = z$ gesetzt, da $\varphi\delta = i\varphi\delta$ und $\varphi^4(i\delta) = \varphi^4\delta$ ist, zuerst:

$$\varphi\,(4+i)\,\delta = \frac{z\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1+x^2} + ix\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{1+z^2}}{1-z^2\,x^2} \quad \ldots \quad (61)$$

Wenn aber $\varphi 2\delta$ hier y genannt wird, so dass

$$z = \frac{2y\sqrt{1-y^4}}{1+y^4} \text{ und } \sqrt{1-z^4} = \sqrt{\frac{1-12y^4+38y^8-12y^{12}+y^{16}}{(1+y^4)^4}}$$

$$= \frac{1-6y^4+y^8}{(1+y^4)^2}$$

ist, woraus dann:

$$\varphi\,(4+i)\,\delta = \frac{2y\sqrt{1-y^4}\;(1+y^4)\sqrt{1-x^4}+ix\,(1-6y^4+y^8)}{(1+y^4)^2 - x^2\,.\,4y^2\,(1-y^4)} \quad .\;(62)$$

folgt, so erhalten wir durch die Substitution von

$$y = \frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4} \quad \text{und} \quad \sqrt{1-y^4} = \frac{1-6x^4+x^8}{(1+x^4)^2}$$

den Endausdruck:

$$\varphi\,(4+i)\,\delta = \frac{Z}{N} \;\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{aligned} \text{wo}\quad Z &= 4x\,(1-x^4)\,(1+x^4)\,[(1+x^4)^4 + 16x^4\,(1-x^4)^2] \\ &\quad [1-6x^4+x^8] + ix\,[(1+x^4)^8 - 6\,(1+x^4)^4. \\ &\quad 16x^4\,(1-x^4)^2 + 2^8x^8\,(1-x^4)^4] \\ \text{und}\quad N &= [(1+x^4)^4 + 16x^4\,(1-x^4)^2]^2 - 16x^4\,(1-x^4). \\ &\quad (1-6x^4+x^8)^2\,(1+x^4)^2. \end{aligned}\right\} \ldots\;(63)$$

Auch hier hat, wie bei der Fünftheilung, der Ausdruck im Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Faktor; es ist nämlich

$$N = 1 + 24x^4 + 524x^8 - 1400x^{12} + 886x^{16} - 408x^{20} + 748x^{24} - 136x^{28} + 17x^{32}$$

oder

$$\begin{aligned} N &= [1 + 24x^4 + 124x^8 - 280x^{12} - 378x^{16} + 424x^{20} + 380x^{24} \\ &\quad - 40x^{28} + x^{32}] + [400x^8 - 1120x^{12} + 1264x^{16} - 832x^{20} \\ &\quad + 368x^{24} - 96x^{28} + 16x^{32}] \\ &= (1 + 12x^4 - 10x^8 - 20x^{12} + x^{16})^2 + (20x^4 - 28x^8 \\ &\quad + 12x^{12} - 4x^{16})^2; \end{aligned}$$

und die Summe dieser Quadrate in die imaginären Faktoren zerfällt, giebt:

$$\begin{aligned} N &= [1 + (12+20i)\,x^4 - (10+28i)\,x^8 - (20-12i)\,x^{12} \\ &\quad + (1-4i)\,x^{16}]\;[1 + (12-20i)\,x^4 - (10-28i)\,x^8 \\ &\quad - (20+12i)\,x^{12} + (1+4i)\,x^{16}] \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (64) \end{aligned}$$

Für Z aber findet man $Z = ixZ_{\prime}$, und

$$Z_{\prime} = (1-4i) - (88+56i)x^4 + (92+588i)x^8 - (872+728i)x^{12} + 1990x^{16} - (872-728i)x^{20} + (92-588i)x^{24} - (88-56i)x^{28} + (1+4i)x^{32}$$

oder

$$Z_{\prime} = [1-4i-(20-12i)x^4-(10+28i)x^8+(12+20i)x^{12}+x^{16}][1+(12-20i)x^4-(10-28i)x^8-(20+12i)x^{12}+(1+4i)x^{16}] \ldots \ldots (65)$$

und somit wird, nach der Division von (64) und (65) durch den gemeinschaftlichen Faktor:

$$\varphi(4+i)\delta = \frac{xi[1-4i-(20-12i)x^4-(10+28i)x^8+(12+20i)x^{12}+x^{16}]}{1+(12+20i)x^4-(10+28i)x^8-(20-12i)x^{12}+(1-4i)x^{16}} . (66)$$

ein Ausdruck, der, abgesehen von dem Faktor xi, in Zähler und Nenner symmetrisch ist in Beziehung auf x^4 und $\frac{1}{x^4}$, wie wir es auch bei $\varphi(2+i)\delta$ fanden, und der, wenn man $\delta = \frac{\omega}{4+i}$ setzt, wodurch $\varphi(4+i)\delta = 0$ und $x = \varphi\frac{\omega}{4+i}$ wird, die einzelnen Werthe von $\varphi^2\frac{\omega}{4+i}$, $\varphi^2\frac{2\omega}{4+i}$ etc. nach der oben angegebenen Methode nur durch grosse Rechnungsschwierigkeiten finden lässt.

Wir dürfen uns jedoch aus derselben nur an den Beweis erinnern, dass

$$\varphi^2\frac{\omega}{4+i},\quad \varphi^2\frac{2\omega}{4+i}, \ldots\ldots \varphi^2\frac{8\omega}{4+i}$$

die 8 verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$x^{16}+(12+20i)x^{12}-(10+28i)x^8-(20-12i)x^4+(1-4i)=0 \;.\;. (67)$$

sind, da sich deren Wurzeln durch die unmittelbare Auflösung derselben leichter finden lassen.

Wir können nämlich dieselbe auch unter die Form bringen:

$$[x^{16}+(12+20i)x^{12}-(46-116i)x^8+(148+156i)x^4+(77-36i)] - [-(36-144i)x^8+(168+144i)x^4+(76-32i)] = 0$$

oder

$$(x^8 + (6 + 10i)\,x^4 + 9 - 2i)^2 - (6i\,x^4 + 4 + 2i)^2\,(1 - 4i) = 0$$

und hieraus werden leicht die Faktoren abgeleitet:

$$\left.\begin{array}{l} x^8 + (6 + 10i + 6i\sqrt{1-4i})\,x^4 + 9 - 2i + (4 + 2i)\sqrt{1-4i} = 0 \\ x^8 + (6 + 10i - 6i\sqrt{1-4i})\,x^4 + 9 - 2i - (4 + 2i)\sqrt{1-4i} = 0 \end{array}\right\} \ldots (68)$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt zur Bestimmung von x:

$$x^4 + 3 + 5i + 3i\sqrt{1-4i} + \sqrt{-34 + 68i - (34 - 16i)\sqrt{1-4i}} = 0$$

$$x^4 + 3 + 5i + 3i\sqrt{1-4i} - \sqrt{-34 + 68i - (34 - 16i)\sqrt{1-4i}} = 0$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + 3 + 5i + 3i\sqrt{1-4i} + \sqrt[4]{1-4i}\,(1 + 4i + (2i - 1)\sqrt{1-4i}) = 0 \\ x^4 + 3 + 5i + 3i\sqrt{1-4i} - \sqrt[4]{1-4i}\,(1 + 4i + (2i - 1)\sqrt{1-4i}) = 0 \end{array}\right\} . (69)$$

aus der zweiten dagegen:

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + (3 + 5i) - 3i\sqrt{1-4i} + \sqrt[4]{1-4i}\,(i(1+4i) + (2+i)\sqrt{1-4i}) = 0 \\ x^4 + (3 + 5i) - 3i\sqrt{1-4i} - \sqrt[4]{1-4i}\,(i(1+4i) + (2+i)\sqrt{1-4i}) = 0 \end{array}\right\} . (70)$$

Die 4 Gleichungen (69) und (70) geben dann die 8 verschiedenen Werthe von x^2 oder von $\varphi^2\left\{\frac{\omega}{4+i}\right\}$, $\varphi^2\left\{\frac{2\omega}{4+i}\right\}$, ... $\varphi^2\left\{\frac{8\omega}{4+i}\right\}$, welche, wollte man die irrationalen Formen beibehalten, in demselben Maasse komplizirt wie die bei der Fünftheilung einfach sind, wenngleich sie nur von Quadratwurzeln abhängen. Die Berechnung mit siebenstelligen Logarithmen ergab für die 16 verschiedenen Wurzeln der Gleichung (67) folgende Werthe:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = \pm\sqrt[4]{-13{,}225917 - 20{,}307364\,i}\,, & x_2 = \pm\, i\,x_1, \\ x_3 = \pm\sqrt[4]{-0{,}271813 + 0{,}704456\,i}\,, & x_4 = \pm\, i\,x_3, \\ x_5 = \pm\sqrt[4]{0{,}094526 - 0{,}126507\,i}\,, & x_6 = \pm\, i\,x_5, \\ x_7 = \pm\sqrt[4]{1{,}403204 - 0{,}270585\,i}\,, & x_8 = \pm\, i\,x_7. \end{array}\right\} \ldots (71)$$

Verwandelt man überall in diesen Ausdrücken das Zeichen von i, so erhält man die Werthe von $\varphi^2\left\{\frac{\omega}{4-i}\right\}$, $\varphi^2\left\{\frac{2\omega}{4-i}\right\}$ . . . $\varphi^2\left\{\frac{8\omega}{4-i}\right\}$, und hieraus mit Anwendung der Summenformel:

$$\varphi\left\{\frac{\omega}{4+i}+\frac{\omega}{4-i}\right\}=\frac{\varphi\,\frac{\omega}{4+i}\sqrt{1-\varphi^4\left\{\frac{\omega}{4-i}\right\}}+\varphi\,\frac{\omega}{4-i}\sqrt{1-\varphi^4\left\{\frac{\omega}{4+i}\right\}}}{1+\varphi^2\left\{\frac{\omega}{4+i}\right\}\cdot\varphi^2\left\{\frac{\omega}{4-i}\right\}}$$

die verschiedenen Theile der halben Axe a als Chorden für die Siebzehntheile unserer Curve, die wir mit $u_1, u_2, u_3 \ldots u_8$ bezeichnen wollen, und bei denen die Möglichkeit einer geometrischen Construktion einleuchtend ist, da sie nur von Quadratwurzeln abhängen.

Der Gang der Rechnung wird am einfachsten, wenn man die Ausdrücke von (71) in die Form bringt:

$$x_1=\pm\sqrt[4]{a+bi}=\pm\sqrt[4]{r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$$

$$\text{und}\quad(1-a)+bi=\varrho\,(\cos\psi+i\sin\psi),$$

und auf eine analoge Weise die Indiçes $_1$, $_2$, $_3$ bei x_3, x_5 und x_7 anwendet. Dann erhält man aus den zusammen gehörigen Werthen von x:

$$u_1=\pm\frac{2\sqrt[4]{r}\sqrt{\varrho}\cos\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)}{1+r}\,a=\pm\,0{,}4606045\,a.$$

$$u_2=\pm\frac{2\sqrt[4]{r}\sqrt{\varrho}\sin\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)}{1+r}\,a=\pm\,0{,}7446965\,a$$

$$u_3=\pm\frac{2\sqrt[4]{r_{,}}\sqrt{\varrho_{,}}\cos\left(\frac{\varphi_{,}}{4}+\frac{\psi_{,}}{2}\right)}{1+r_{,}}\,a=\pm\,0{,}9479800\,a$$

$$u_4=\pm\frac{2\sqrt[4]{r_{,}}\sqrt{\varrho_{,}}\sin\left(\frac{\varphi_{,}}{4}+\frac{\psi_{,}}{2}\right)}{1+r_{,}}\,a=\pm\,0{,}8613340\,a.$$

$$u_5 = \pm \frac{2 \sqrt[4]{r_2} \sqrt{\varrho_2} \cos\left(\frac{\varphi_2}{4} + \frac{\psi_2}{2}\right)}{1 + r_2} a = \pm 0{,}9940963\, a$$

$$u_6 = \pm \frac{2 \sqrt[4]{r_2} \sqrt{\varrho_2} \sin\left(\frac{\varphi_2}{4} + \frac{\psi_2}{2}\right)}{1 + r_2} a = \pm 0{,}3093421\, a.$$

$$u_7 = \pm \frac{2 \sqrt[4]{r_3} \sqrt{\varrho_3} \cos\left(\frac{\varphi_3}{4} + \frac{\psi_3}{2}\right)}{1 + r_3} a = \pm 0{,}1540212\, a$$

$$u_8 = \pm \frac{2 \sqrt[4]{r_3} \sqrt{\varrho_3} \sin\left(\frac{\varphi_3}{4} + \frac{\psi_3}{2}\right)}{1 + r_3} a = \pm 0{,}6080997\, a.$$

Von diesen Ausdrücken entsprechen auch u_7, u_6, u_8, u_5, so wie u_1, u_4, u_2, u_3 der allgemeinen Relation:

$$u_6 = \frac{2\, u_7 \sqrt{1 - (u_7)^4}}{1 + (u_7)^4} \quad \text{etc.}$$

$$\text{und} \quad u_1 = \frac{u_7 \sqrt{1 - (u_6)^4} + u_6 \sqrt{1 - (u_7)^4}}{1 + (u_6)^2\, (u_7)^2}.$$

Wir haben demnach in dem positiven Theile der halben Axe der Curve

u_7	für die Theile	1 und 16.	des Bogens,
u_6	- - -	2 und 15.	- -
u_1	- - -	3 und 14.	- -
u_8	- - -	4 und 13.	- -
u_2	- - -	5 und 12.	- -
u_4	- - -	6 und 11.	- -
u_3	- - -	7 und 10.	- -
u_5	- - -	8 und 9.	- -

dagegen in der ganzen Curve ist:

$$\varphi\,\frac{\omega}{17} = 0{,}3093421\,a; \qquad \varphi\,\frac{9\,\omega}{17} = -\,0{,}1540212\,a;$$

$$\varphi\,\frac{2\,\omega}{17} = 0{,}6080997\,a; \qquad \varphi\,\frac{10\,\omega}{17} = -\,0{,}4606045\,a;$$

$$\varphi\,\frac{3\,\omega}{17} = 0{,}8613340\,a; \qquad \varphi\,\frac{11\,\omega}{17} = -\,0{,}7446965\,a;$$

$$\varphi\,\frac{4\,\omega}{17} = 0{,}9940963\,a; \qquad \varphi\,\frac{12\,\omega}{17} = -\,0{,}9479800\,a;$$

$$\varphi\,\frac{5\,\omega}{17} = 0{,}9479800\,a; \qquad \varphi\,\frac{13\,\omega}{17} = -\,0{,}9940963\,a;$$

$$\varphi\,\frac{6\,\omega}{17} = 0{,}7446965\,a; \qquad \varphi\,\frac{14\,\omega}{17} = -\,0{,}8613340\,a;$$

$$\varphi\,\frac{7\,\omega}{17} = 0{,}4606045\,a; \qquad \varphi\,\frac{15\,\omega}{17} = -\,0{,}6080997\,a;$$

$$\varphi\,\frac{8\,\omega}{17} = 0{,}1540212\,a; \qquad \varphi\,\frac{16\,\omega}{17} = -\,0{,}3093421\,a.$$

Conitz, im Juli 1846.





Schulnachrichten.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Lehrverfassung.

Prima.

Ordinarius: Herr Professor Lindemann.

A. Sprachen.

I. Deutsche Sprache. Die fünfte und sechste Periode der deutschen Litteratur, nach Koberstein. Verbesserung der Aufsätze und Leitung der freien Vorträge und der Privatlectüre. In der Klasse wurde Schiller's Tell gelesen und erklärt. 2 St. Hr. Professor Lindemann.

II. Lateinische Sprache. Cic. Brut. Die Uebersetzung deutsch, die Erklärung lateinisch. Cursorisch wurden gelesen die Reden pro Marcello, pro Ligario, pro Dejotaro und pro lege Manilia. Correctur der freien lateinischen Arbeiten; Extemporalien; Grammatik nach Zumpt: Syntaxis ornata. Privatlectüre: Taciti Germania. 6 Stunden. Im Winter Hr. Oberlehrer Dr. Schultz; im Sommer Hr. Dr. Peters.

Leben und Schriften des Horaz; Metrisches; Oden des ersten und zweiten Buches. 2 St. Brüggemann.

III. Griechische Sprache. Einführung in den Plato; Apologie und Euthyphro. Schriftliche Uebungen; Grammatik. Privatlektüre: Herodot. 4 St. Brüggemann.

Hom. Il. VI. bis IX. incl. Die Uebersetzung deutsch, die Erklärung lateinisch. 2 St. Hr. Prof. Lindemann.

IV. Französische Sprache. Montesquieu: Considérations sur les causes de la grandeur etc. von chap. 6 bis 14. Die Erklärung zum Theil französisch. Grammatik nach Caspers. Correctur der schriftlichen Arbeiten. 2 St. Im Winter Hr. Oberlehrer Dr. Schultz; im Sommer Hr. Prof. Lindemann.

V. Polnische Sprache. Seit Ostern die Elemente der polnischen Sprachlehre, nach Poplinski. 2 St. Herr Stephan.

VI. Hebräische Sprache. Prosaische und poetische Stücke aus dem Lesebuche von Gesenius; die Uebersetzung zum Theil deutsch, zum Theil lateinisch. Formenlehre und Syntax nach Gesenius. 2 St. Hr. Religionslehrer Thamm.

B. Wissenschaften.

I. Religionslehre. 1.) Für die katholischen Schüler. Religionslehre des A. und N. Bundes. 2 St. Hr. R.-L. Thamm. — 2.) Für die evangelischen Schüler. Die Augsburgische Confession; die Exegese der Apostelgeschichte beendigt und die des Römerbriefes angefangen. 2 St. Hr. Superintendent Annecke.

II. Philosophische Propädeutik. Empirische Psychologie, nach Biunde. 2 St. Hr. Prof. Lindemann.

III. Mathematik. Die Zineszinsen- und Rentenrechnung, die arithmetischen Progressionen höherer Ordnung und die figurirten Zahlen, die Entwickelung der Funktionen in Reihen mit besonderer Berücksichtigung der logarithmischen

und goniometrischen Funktionen. Wiederholung der Trigonometrie und die Kegelschnitte. 4 St. Hr. Oberlehrer Wichert. Handbücher: Grunert's Lehrbuch der Mathematik und der Leitfaden von Matthias. Außer manchen in der Schule bei Gelegenheit der vorgetragenen Sätze sich darbietenden Aufgaben wurden den Schülern der 3 obern Classen alle 3 Wochen noch häusliche Arbeiten gestellt und vom Lehrer corrigirt.

IV. Geschichte und Geographie. Geschichte des Mittelalters, nach Pütz. Wiederholung der Geographie. 2 St. Hr. Prof. Lindemann.

V. Physik. Mathematische Geographie und die Vorbegriffe der Astronomie; die Statik und Mechanik fester Körper mit der nöthigen mathematischen Begründung. Im Winter 2 St.; im Sommer 1 St. Hr. O.-L. Wichert. Handbuch: August's Auszug aus Fischer's mechanischer Naturlehre.

VI. Naturgeschichte. Wiederholung der Naturgeschichte. Seit Ostern 1 St. Hr. G.-L. Haub.

Während des Sommerhalbjahres unterhielt sich der Dirigent in besondern Stunden mit den Schülern der Prima über Anordnung und Einrichtung des academischen Studiums.

Secunda.

Ordinarius: im Wintersemester Herr Oberlehrer Dr. Schultz; im Sommer Herr Oberlehrer Wichert.

A. Sprachen.

I. Deutsche Sprache. Rhetorik nach Püllenberg; Correctur der Aufsätze und Leitung der freien Vorträge. 3 St. Im Winter Hr. Prof. Lindemann; im Sommer Hr. O.-L. Wichert.

II. Lateinische Sprache. Liv. lib. V. Cic. orat. pro Archia, in Catil. I. II. Die erste Catilin. Rede wurde memorirt und in sprachlicher, wie in sach-

licher Beziehung vielfältig durchgenommen; Uebungen im Lateinsprechen. Correctur der Exercitien und der von Abtheilung I. gelieferten Aufsätze; Extemporalien; Grammatik nach Zumpt: die Lehre vom Gebrauche der Tempora u. s. w. bis zur syntaxis ornata. 6 St. Hr. O.-L. Dr. Schultz; im Sommer Hr. Dr. Moiszisstzig.

Virg. Aen. lib. IX. und X. Vorher ein Ueberblick über des Dichters Leben und Schriften. 2 St. Brüggemann.

III. Griechische Sprache. Xenoph. Mem. lib. I. II. cap. I. Wiederholung der unregelmäßigen Zeitwörter; die Lehre von der Wortbildung und den Partikeln; Syntax §§. 122—139. nach Buttmann. Correctur der schriftlichen Arbeiten; Extemporalien. 4 St. Hr. Dr. Moiszisstzig; im Sommer Hr. Dr. Bender.

Hom. Odyss. lib. IX. X. XI. 2 St. Hr. Prof. Lindemann.

IV. Französische Sprache. Histoire de Charles XII par Voltaire, liv. II. Grammatik nach Caspers: Wiederholung des Wichtigsten aus der Formenlehre; die unregelmäßigen Verba; Syntax; Correctur der schriftlichen Arbeiten. 2 St. Hr. O.-L. Dr. Schultz; im Sommer Hr. Prof. Lindemann.

V. Polnische Sprache. Die Anfangsgründe der polnischen Sprachlehre nach Poplinski. Seit Ostern 2 St. Hr. Stephan.

VI. Hebräische Sprache. Formenlehre; Anleitung zum Lesen und zum Uebersetzen nach Gesenius. 2 St. Hr. R.-L. Thamm.

B. Wissenschaften.

I. Religionslehre. 1.) Für die katholischen Schüler. Moral. 2 St. Hr. R.-L. Thamm. — 2.) Für die evangelischen Schüler. S. Prima.

II. Mathematik. Wiederholung der Lehre von den Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten und den Gleichungen des zweiten Grades, die

Kettenbrüche und deren Anwendung bei der Auflösung unbestimmter Gleichungen des ersten Grades. Wiederholung der Lehre von den Proportionen an geradlinigen ebenen Figuren und am Kreise und der Berechnung solcher Figuren; die Stereometrie. 4 St. Hr. O.-L. Wichert.

III. Geschichte und Geographie. Geschichte der Römer, nach Pütz. 2. St. Hr. Prof. Lindemann. Grundriß der allgemeinen Geographie; Beschreibung der europäischen Länder. 1 St. Hr. Dr. Bender.

IV. Physik. Die Lehre von der Electrizität, dem Galvanismus, Magnetismus, Electromagnetismus und den Inductionserscheinungen; Erklärung der meteorologischen Phänomene und einzelne Abschnitte aus der physischen Geographie. 2. St. Hr. O.-L. Wichert.

Tertia.

Ordinarius: Herr Gymnasial-Lehrer *Dr.* Bender.

A. Sprachen.

I. Deutsche Sprache. Wiederholung der Lehre vom Satze, nach Hoffmann's hochdeutscher Schulgrammatik; die Lehre von den allgemeinen Eigenschaften des deutschen Stils; Uebungen im Declamiren und Correctur der alle drei Wochen gelieferten Aufsätze. 3 St. Im Winter Hr. O.-L. Wichert; im Sommer Hr. G.-L. Haub.

II. Lateinische Sprache. Caes. commentt. de B. G. lib. V. — lib. VII. bis cap. 32. Der Anfang des lib. III. des B. C. 2 St. Grammatik nach Zumpt: Wiederholung der Casuslehre; Wortbildungslehre; die Tempora und Modi. — Correctur der wöchentlichen schriftlichen Arbeiten, nach Litzinger. VI. Cursus. 3 St. Hr. G.-L. Dr. Bender. Memorirübungen: Aus Caes. de B. G. lib. V. wurden die ersten 18 Capitel auswendig gelernt und zur Einübung der Grammatik benutzt. 1 St. Im Winter Brüggemann; im Sommer Hr. G.-L. Dr. Bender.

Ovid. Metamorph. lib. VIII. — lib. IX. v. 325. Memoriren ausgewählter Stellen. Lehre von der Quantität und vom Verse, besonders vom Hexameter. 2 St. Im Winter Hr. Dr. Moiszisstzig; im Sommer Hr. Stephan.

III. Griechische Sprache. Aus dem Lesebuche von Jacobs die Aesopischen Fabeln, die Anekdoten von Staatsmännern und Königen; aus der Völkerkunde Nr. 16 — 20.; die Anekdoten von Lacedämoniern und gemischte Fabeln bis Nr. 3. und einige mythologische Erzählungen. Aus Xenoph. Anab. lib. I. cap. 1 — 3. — Grammatik nach Buttmann: Wiederholung des Pensums der Quarta; die Zeitwörter auf μι und die unregelmäßigen Verba. Correctur der wöchentlichen schriftlichen Arbeiten. 6 St. Im Winter Hr. G.-L. Dr. Bender; im Sommer Hr. Dr. Peters.

IV. Französische Sprache. Die Formenlehre bis zu den starken Verben, nach der Grammatik von Caspers. Mündliche Uebersetzungen aus Numa Pompilius par Florian; Correctur der schriftlichen Uebungen. 2. St. Im Winter Hr. O.-L. Dr. Schultz; im Sommer Hr. Stephan.

V. Polnische Sprache. Seit Ostern die Elemente. 2 St. Hr. Stephan.

B. Wissenschaften.

I. Religionslehre. 1.) Für die katholischen Schüler. Wiederholung der Glaubenslehre und der Pflichten gegen Gott; die Pflichten gegen sich selbst und gegen den Nächsten; die besondern Standespflichten; die Lehre über die Mittel und Hindernisse eines gottgefälligen Lebens, nach Ontrup. 2 St. Hr. R.-L. Thamm. — 2.) Für die evangelischen Schüler. Das erste Hauptstück des Catechismus Luthers nach Kniewel. Biblische Geschichte und Reformationsgeschichte. 2 St. Hr. Superint. Annecke.

II. Mathematik. Die Buchstabenrechnung, Rechnung mit ganzen positiven und negativen Potenzen, das Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln, die Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe. — Die

Congruenz der Dreiecke, Gleichheit der Figuren aus Grundlinie und Höhe, Theilung der Figuren und die Lehre vom Kreise. 4 St. Hr. O.-L. Wichert.

III. Geschichte und Geographie. Geschichte, nach Pütz. Deutsche Brandenburgisch-Preußische Geschichte, und spezieller, zur unmittelbaren Anregung der Liebe zu diesem Unterrichtsgegenstande: Abriß der Geschichte von Pommerellen und der Stadt Conitz. — Beschreibung, besonders hydrographische und orographische, der Deutschen und Preußischen Länder. Handbuch: Nieberding. 3 St. Hr. G.-L. Dr. Bender.

IV. Naturgeschichte. Die Knochenthiere und die Botanik. 2 St. Hr. G.-L. Haub, nach eigenem Leitfaden.

Quarta.

Ordinarius: Herr Gymnasial-Lehrer Kattner.

A. Sprachen.

I. Deutsche Sprache. Die Lehre der Tempora, Modi und des Satzes, nach Hoffmann's Grammatik. Lesen aus Hülstett's Sammlung, verbunden mit Denkübungen. Declamiren; Verbesserung der Aufsätze. 3 St. Hr. Dr. Moiszisstzig.

II. Lateinische Sprache. Wiederholung des grammatischen Pensums der vorhergehenden Classe; die Lehre von dem Satze, dem Gebrauche der Casus, des Accusativs mit dem Infinitiv, der Absichts- und der Fragesätze, nach Zumpt. Aus Döring wurden die ersten 12 Stücke der römischen Geschichte in's Lateinische übersetzt und memorirt. Aus Cornelius Nepos übersetzt und erklärt: Miltiades, Themistocles, Aristides, Cimon und Lysander. Miltiades und Themistocles memorirt. Correctur der schriftlichen Arbeiten. 7 St. Hr. G.-L. Kattner.

Die Lehre über die Quantität der Sylben u. s. w., nach Zumpt. Phaedri fabulae lib. I. und II. 2 St. Anfangs Hr. G.-L. Kattner; seit dem 12. Februar c. Hr. Prof. Dr. Junker.

III. Griechische Sprache. Die Formenlehre bis zu den Zeitwörtern auf $\mu\iota$. Aus dem Lesebuche von Jacobs die entsprechenden Stücke bis zu den Zeitwörtern auf $\mu\iota$. Wöchentlich wurden einige Sätze memorirt und eine schriftliche Arbeit gebracht. 6 St. Anfangs Hr. G.-L. Kattner; dann Hr. Prof. Dr. Junker.

B. Wissenschaften.

I. Religionslehre. 1.) Für die katholischen Schüler. Die heiligen Sacramente, die Pflichtenlehre, nach Ontrup. Erklärung der auswendig gelernten sonn- und festtäglichen Episteln. 2 St. Hr. R.-L. Thamm. — 2.) Für die evangelischen Schüler. Das 2te Hauptstück des Catechismus nach Weiße. Biblische und Reformationsgeschichte. 2 St. Hr. Superint. Annecke.

II. Mathematik. Wiederholung der Lehre vom gemeinen Bruche; Dezimalbrüche; zusammengesetzte Regel vonDreien und Gesellschaftsrechnung. In der Geometrie Euklid's I. Buch. — 3 St. Anfangs Hr. Dr. Moiszisstzig; vom 12. Februar c. ab Hr. Prof. Dr. Junker.

III. Geschichte und Geographie. Geschichte der Orientalen und Griechen, nach Pütz. Beschreibung von Asien, Griechenland, der Türkei, Rußland, Afrika, Amerika und Australien, nach Nieberding. 3 St. Hr. G.-L. Dr. Bender.

IV. Naturgeschichte. Gliederthiere und Anleitung zur Botanik. 2 St. Hr. G.-L. Haub.

Quinta.

Ordinarius: Herr Gymnasial-Lehrer Haub.

A. Sprachen.

I. Deutsche Sprache. Aus Hülstett's Sammlung wurden Stücke gelesen und das Gelesene erklärt, besprochen und nacherzählt; 1 Stunde Vortrag auswendig gelernter Gedichte aus jener Sammlung; 1 Stunde Correctur der schriftlichen wöchentlichen Arbeiten. 4 St. Im Winter Hr. G.-L. Haub; im Sommer Hr. Dr. Peters.

II. Lateinische Sprache. Wiederholung und Erweiterung der Formenlehre; Erlernen der Perfecta und Supina; Hauptregeln der Rection der Casus; Correctur der schriftlichen Arbeiten; Uebersetzen und Memoriren aus dem Uebungsbuche von Litzinger. 10 St. Hr. G.-L. Haub.

B. Wissenschaften.

I. Religionslehre. 1.) Für die katholischen Schüler. Glaubenslehre: die Erlösung und Heiligung; die Gnade und Gnadenmittel, d. h. Sacramente, nach Ontrup. Biblische Geschichte des A. T. vom zweiten Tempelbau bis auf Christus und die des N. T., nach Kabath. Erklärung der auswendig gelernten sonn- und festtäglichen Evangelien. 2 St. Hr. R.-L. Thamm. — 2.) Für die evangelischen Schüler. Das erste und 2te Hauptstück des Catechismus dem Wortsinne nach erklärt und auswendig gelernt. Biblische Geschichte, nach Preuß. 2 St. Hr. Superint. Annecke.

II. Rechnen. Die Bruchrechnung; einfache und zusammengesetzte Regel von Dreien; der Gesellschaftssatz. 4 St. Hr. G.-L. Kattner.

III. Geschichte und Geographie. Biographische Erzählungen aus der Geschichte des Mittelalters; Einzelnes aus der neuern Geschichte, nach Welter. — Beschreibung der sämmtlichen Länder von Europa, unter sorgfältiger Be-

rücksichtigung der hydrographischen und orographischen Verhältnisse und Veranschaulichung derselben an der Tafel. Vorher ging eine allgemeine Belehrung über Fluß- und Gebirgs-Systeme und andere geographische Verhältnisse. Die Schüler fertigten von jedem durchgenommenen Lande zu Hause eine Charte an. Handbuch: Nieberding. 3 St. Hr. G.-L. Dr. Bender.

IV. Naturgeschichte. Beschreibung einzelner Säugethiere und Vögel, nach eigenem Leitfaden. 2 St. Hr. G.-L. Haub.

Sexta.

Ordinarius: Herr *Dr.* Moiszisstzig.

A. Sprachen.

I. Deutsche Sprache. Ausgewählte Stücke aus Hülstett's Sammlung wurden gelesen, erklärt, wiedererzählt und an die Tafel geschrieben. Die Grundregeln der Orthographie und Grammatik. Anfertigung schriftlicher Arbeiten. 2 St. Im Winter Hr. Dr. Moiszisstzig; im Sommer Hr. Stephan. Lese- und Vortragsübungen. 2 St. Brüggemann.

II. Lateinische Sprache. Etymologie nach Zumpt's Auszuge mit Auswahl. Uebersetzen und Memoriren geeigneter Sätze aus Litzinger's Lehrbuche. Wöchentliche schriftliche Arbeiten. 10 St. Hr. Dr. Moiszisstzig.

B. Wissenschaften.

I. Religionslehre. 1.) Für die katholischen Schüler. Glaubenslehre: vom Dasein Gottes bis zur Heiligung, nach Ontrup. Biblische Geschichte des A. T., nach Kabath. Auswendiglernen derjenigen Stücke, die jeder katholische Christ wissen soll. 2 St. Hr. R.-L. Thamm. — 2.) Für die

evangelischen Schüler. Die Gebote und Liederverse auswendig gelernt. Die biblische Geschichte des A. T. bis zur Zeit der Richter, nach Preuß. 2 St. Hr. Superint. Annecke.

II. Rechnen. Numeriren; die 4 Spezies in benannten und unbenannten Zahlen; die Lehre vom gemeinen Bruche; Kopfrechnen. 4 St. Im Winter Hr. Dr. Moiszisstzig; im Sommer Hr. Stephan.

III. Geschichte und Geographie. Biographische Erzählungen aus der alten Geschichte, nach Welter. Die nothwendigsten geographischen Vorbegriffe; Oceanbeschreibung; Beschreibung von Europa. 3 St. Im Winter Hr. G.-L. Dr. Bender; im Sommer Hr. Dr. Peters.

Fertigkeiten.

I. Singen in den vier unteren Classen in je 2 wöchentlichen Stunden und zwar in Sexta und Quinta: Kenntniß der Noten und Pausen; Versetzungszeichen; Ton- und Taktarten; Intervalle; Tonleiter; Uebungen im Tontreffen; Singen einstimmiger Choräle und Gelegenheits-Lieder.

In Quarta und Tertia: Singen zwei- und vierstimmiger Lieder mit theoretischen Erläuterungen. —

Mit einem aus den besten Sängern aller Classen gebildeten Chore wurden in einer besonderen wöchentlichen Stunde: Hymnen, Motetten und Chöre aus Haydn's Schöpfung und Jahreszeiten eingeübt. Die katholischen Schüler aus diesem Sängerchor übten noch besonders in einer wöchentlichen Stunde katholischen Kirchengesang, wobei das Choralbuch von C. L. Vieth vorzugsweise zu Grunde gelegt wurde.

II. Zeichnen in Sexta und Quinta und zwar Zeichnen mit Lineal und Zirkel, nach Schmid's und Breysing's Methode. 2 Stunden. In Quarta freies Handzeichnen nach Vorlegeblättern. 2 Stunden.

III. Schönschreiben in Sexta in 5 und in Quinta in 3 wöchentlichen Stunden, nach Heinrig's Vorschriften.

IV. Die Turnübungen fanden Montags, Dienstags, Donnerstags und Freitags von halb 7 bis halb 8 Uhr Abends Statt. Herr Gymnasial-Hülfslehrer Ossowski.

Verordnungen.

1. Das Königliche hohe Vorgeordnete Ministerium hat unter dem 29. Juli 1845 angeordnet, daß die vier ersten Lehrerstellen, außer der Directorstelle, bei dem hiesigen Gymnasium als Oberlehrerstellen festgestellt werden. Königsberg, den 12. August 1845.

2. Das Verbot des Besuches der Gasthäuser, Conditoreien, Restaurationen und Billards von Seiten der Gymnasial-Schüler wird unter abschriftlicher Mittheilung des Ministerial-Rescripts vom 31. Juli 1824 in Erinnerung gebracht. Königsberg, den 27. August 1845.

3. Der Herr Minister der geistlichen und Unterrichts-Angelegenheiten hat sich veranlaßt gefunden, folgende Bestimmungen zu treffen: „Der Titel „**Oberlehrer**“ ist entweder mit der Stelle, welche der Lehrer einnimmt, von selbst verbunden, oder wird als persönliche Auszeichnung für besonders erworbene Verdienste, abgesehen von der besondern Natur der Stelle, verliehen. Zu denjenigen Lehrstellen, mit welchen der Titel „**Oberlehrer**“ verbunden ist, dürfen nur solche Schulmänner gewählt und vorgeschlagen werden, die nach der Vorschrift des Reglements für die Prüfung pro facultate docendi, resp. pro loco und pro ascensione ihre Befähigung für den Unterricht in den beiden obern Classen dargethan haben. Rücksichtlich der Verleihung des Titels „**Oberlehrer**“ als persönliche Auszeichnung der nicht in den gedachten obern Lehrstellen stehenden ordentlichen Lehrer bleibt es bei der Bestimmung der Verfügung vom 24. De-

tober 1837, wornach dazu nur diejenigen ordentlichen Lehrer vorgeschlagen werden dürfen, welche durch längere Verwaltung des Ordinariats einer Classe sich als besonders tüchtige Lehrer und Erzieher bewährt und sich um die Schule ein bedeutendes Verdienst erworben haben." Königsberg, den 24. September 1845.

4. Im Progymnasium zu Deutsch-Crone werden von jetzt ab zu Ende jedes Schuljahres Abgangs-Prüfungen abgehalten und auf Grund derselben Abgangszeugnisse ausgefertigt werden, deren Inhaber ohne weitere Prüfung in die Prima eines vollständigen Gymnasiums aufgenommen werden sollen. Königsberg, den 20. Januar 1846.

5. Zu Mitgliedern der Prüfungs-Commission der Anstalt für diejenigen jungen Leute des Inlandes, welche entweder auf ausländischen Lehranstalten oder privatim unterrichtet worden sind und zu ihrer Bewerbung um Anstellung im Post-, Steuerfach und andern Zweigen des öffentlichen Dienstes eines von einer diesseitigen Schul-Anstalt ausgestellten Zeugnisses bedürfen, werden der Director, der Professor Lindemann und der Oberlehrer Wichert ernannt. Königsberg, den 1. Mai 1846, mit Bezugnahme auf das hohe Ministerial-Rescript vom 23. März 1846.

6. Mittheilung eines die in den Gymnasien im Gebrauche befindlichen lateinischen und griechischen Grammatiken betreffenden Ministerial-Rescripts vom 28. April l. J. Königsberg, den 11. Mai 1846.

7. Empfohlen wurden durch das Königliche Hochlöbliche Provinzial-Schul-Collegium:

   1.) Lehrbuch der Arithmetik von Dr. Wilde.
   2.) Sammlung von 100 geometrischen Aufgaben von Dr. Luke.
   3.) Hülfsbuch für den Religionsunterricht auf der obersten Lehrstufe der Gymnasien von Dr. Diedrich.
   4.) Die harmonischen Verhältnisse; ein Beitrag zur neuern Geometrie von E. Adams.

5.) Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks von E. Adams.
6.) Bräuer's Auszüge aus dem Zeichnenunterrichte u. s. w.
7.) Die Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit in deutscher Bearbeitung unter dem Schutze Sr. Majestät des Königs Friedrich Wilhelm IV. von Preußen herausgegeben von G. Pertz, J. Grimm, K. Lachmann, L. Raabe, K. Ritter.
8.) Sammlung deutscher Gedichte aus dem Gebiete der Geschichte Preußens von Dr. Lehmann.

Zweiter Abschnitt.

Chronik des Gymnasiums.

Das Schuljahr wurde am 3. October v. J. durch feierlichen Gottesdienst in der Gymnasial-Kirche eröffnet; die Aufnahme der neuen Schüler fand am 1. und 2. October Statt.

Mit dem Anfange des Schuljahres wurde dem Herrn Religionslehrer Thamm die unmittelbare Inspection der Convictoren übertragen und die mit derselben verbundene Amtswohnung im Convictgebäude überwiesen. Die revidirte Hausordnung für die Convictoren kam gleichzeitig zur Anwendung.

Der hohe Geburtstag Sr. Majestät des Königs wurde am 15. October v. J. in gewohnter Weise von der Anstalt begangen. Die Festrede hielt Herr Dr. Moiszisstzig.

Seine Majestät der König haben mittelst Allerhöchster Ordre vom 7. November v. J. dem Gymnasium zum Zwecke der Einrichtung von zwei Parallel-Classen auf die Dauer des Bedürfnisses einen jährlichen Zuschuß zu bewilligen und gleichzeitig zu genehmigen geruht, daß die mit der ersten Lehrerstelle verbundene Amtswohnung zur Gewinnung der erforderlichen Localitäten eingezogen werde. — Den neuen

wissenschaftlichen Hülfslehrer hat die Anstalt in der Person des Herrn J. Stephan aus Breslau am 1. Mai c. willkommen geheißen.

Am 4. April d. J. wurde Herr Oberlehrer Dr. Schultz vor dem versammelten Lehrer-Collegium und den Schülern unter Anerkennung seiner erfolgreichen zweijährigen Thätigkeit und mit den besten Wünschen für sein neues Amt, die Direction des Königl. katholischen Gymnasiums in Braunsberg, aus seinen hiesigen Dienstverhältnissen durch den Director entlassen.

Seit dem 1. Mai c. arbeitet an unserer Anstalt höherer Weisung zufolge Herr Dr. Peters aus Allendorf in Westphalen.

Ein Turnzug sämmtlicher Schüler des Gymnasiums unter Begleitung der Lehrer wurde auch in diesem Jahre, am 23. Juni, unternommen.

Während der, mit höherer Genehmigung am 16. Juli c. angetretenen Reise des Directors, übernahm Herr Prof. Lindemann in Gemäßheit der Verfügung des Königlichen Hochlöblichen Provinzial-Schul-Collegiums vom 25. Juni c. die Leitung der Anstalt. —

Die heiligen Sacramente der Buße und des Altars wurden unter bereitwilliger Assistenz der mehrfach gedachten Herren Geistlichen der Umgegend dreimal im Verlaufe des Schuljahres den katholischen Schülern der Anstalt gespendet. Die von dem Herrn Religionslehrer Thamm in besonderen Stunden vorbereiteten jüngern Schüler nahmen am Himmelfahrtstage zum erstenmale an der heiligen Communion Theil. — Die evangelischen Schüler begingen nach Anordnung des Herrn Superintendenten Annecke die Abendmahlsfeier.

Störungen sind, dem Himmel sei Dank! im Verlaufe des ganzen Schuljahres in keiner Weise vorgekommen!

Zur Verhütung von Unglücksfällen und Unordnungen bei dem Baden wurden am 26. Mai c. mehrere Bestimmungen der Schule in allen Classen zur strengsten Befolgung eingeschärft. Um die Schüler der drei untern Classen nicht sich selbst zu

überlassen, hatten einige Primaner und Secunadner aus eigener Bewegung es übernommen, in den bestimmten Stunden an dem Badeplatze abwechselnd gegenwärtig zu sein. Diese schätzenswerthe Bereitwilligkeit wird hier gern erwähnt und anerkannt. Vielleicht gelingt es der Anstalt, in Zukunft einen eigentlichen Schwimmlehrer zu gewinnen, wenigstens wird die Aufmerksamkeit derselben auf diesen Punkt fortwährend gerichtet bleiben. —

Dritter Abschnitt.

Statistische Uebersicht.

Im verflossenen Schuljahre haben am Unterrichte Theil genommen in

Prima	31	Schüler
Secunda	52	"
Tertia	77	"
Quarta	88	"
Quinta	80	"
Sexta	74	"
Summa	402	Schüler.

Aufgenommen wurden 107, es gingen ab aus Prima 1, aus Secunda 7, aus Tertia 9, aus Quarta 6, aus Quinta 4 und aus Sexta 1 Schüler. Ein Schüler der Quarta wurde am letzten Tage des vorigen Schuljahres durch einstimmigen Conferenz-Beschluß von der Anstalt verwiesen. Am 25. August v. J. erlag der Sextaner Lorenz Okuniewski aus Sarnowo den Folgen der rothen Ruhr und wurde am 28. unter Begleitung der noch anwesenden Lehrer und Schüler zur Ruhe bestattet. Den Tod des um wenige Jahre ältern Bruders hatte die Anstalt erst unlängst zu betrauern. Für die großen Beweise theilnehmender Liebe, mit welcher der Knabe bis zum letzten Athemzuge gepflegt und ärztlich behandelt worden ist, so-

wie allen, welche bei dem Begräbniß des Hingeschiedenen so thätigen und bereitwilligen Antheil genommen haben, spreche ich im Namen des Gymnasiums den ganz ergebensten Dank aus.

Zu der diesjährigen Entlassungs-Prüfung hatten sich zwölf Primaner gemeldet. Allen wurde auf Grund des schriftlichen und des unter dem Vorsitze des Königl. Provinzial-Schulrathes, Herrn Dr. Lucas, am 4. und 5. August d. J. abgehaltenen mündlichen Examens einstimmig das Zeugniß der Reife zugesprochen:

Namen.	Alter.	Geburtsort.	Confession.	war in Prima.	Studium.	Universität.
1. Franz Erbe .	19½ J.	Braunsberg	kath.	2 J.	Philologie	Königsb.
2. Joseph Gollnick .	21¼ J.	Schlochau	kath.	2 J.	Theologie	Pelplin.
3. Ignaz v. Grabowski	23¾ J.	Labodda	kath.	2 J.	Rechtswiss.	Breslau.
4. August Groß .	23¼ J.	Wolfsdorf	kath.	2 J.	Rechtswiss.	Breslau.
5. Johann Hoppe .	21½ J.	Christfelde	kath.	2 J.	Theologie u. Philologie	Breslau.
6. Theodor Krause	20¼ J.	Dt. Crone	evang.	2 J.	Medizin	Greifsw.
7. Thaddäus v. Lebiński	23 J.	Borzestowska-Hutta	kath.	2 J.	Theologie	Pelplin.
8. Martin Mathey	33¾ J.	Seeresen	kath.	2 J.	Theologie	Pelplin.
9. August Schmidt	24 J.	Niedamowo	kath.	2 J.	Theologie	Pelplin.
10. Joseph Schulist	23½ J.	Stobno	kath.	2 J.	Theologie	Breslau.
11. Albert Schultz .	21¼ J.	Danzig	kath.	2 J.	Theologie	Breslau.
12. Johann Semrau	20 J.	Schulzenwalde	kath.	2 J.	Theologie u. Philologie	Breslau.

Der Lehrapparat ist durch die im Etat festgesetzte Summe vermehrt worden. An Geschenken ging dem Gymnasium zu:

I. Von dem Hohen Ministerium der geistlichen und Unterrichts-Angelegenheiten.

1) Ein Exemplar der Archäologischen Zeitung vom Prof. Dr. Gerhard. Jahrgang 1845.

II. Von dem Hochlöblichen Provinzial-Schul-Collegium.

2) Ein Exemplar des 39. Bandes des encyclopädischen Wörterbuches der medizinischen Wissenschaften.

3) " " des fasc. 7. tom. II. von Suidae lexicon ed. Bernhardy.

4) " " der Abhandlung von Hennig: die continuirlich-vorlesende und die conversatorisch-repetitorische Lehrmethode.

III. Von der Bädeker'schen Buchhandlung in Essen.

5) Ein Exemplar des lateinischen Uebungsbuches für Quinta von Spieß.

IV. Von dem Herrn Pfarrer Maslon in Pelplin.

Fünf in der Ferse gefundene silberne Münzen.

Für diese Geschenke spricht die Anstalt ihren verbindlichsten Dank aus.

Für die Schüler-Lese-Bibliothek haben die Schüler der Prima und Secunda 23 Thlr. 10 Sgg., die Schüler der Tertia und Quarta 18 Thlr. 12 Sgg. 6 Pf. und die Schüler der Quinta und Sexta 20 Thlr. 10 Sgg. eingezahlt.

An Beiträgen für die Schüler-Lehrbücher-Bibliothek sind von den Schülern der Anstalt 11 Thlr. 5 Sgg. eingekommen.

Die durch den Abgang der Convictoren Kamrowski, Kręcki, Drązkowski und Waldach erledigten Convictstellen sind dem Primaner August Schmidt und den Ober-Secundanern Julius Schultz, Franz Wollschläger und Johann Esch verliehen worden. — Die Bischöflichen Fundationsstellen genossen auch im verflossenen Schuljahre die Primaner Stanislaus Tandetzki und Julius Zucht; auch ließen Seine Bischöfliche Gnaden, Herr Dr. Sedlag, einem Secundaner und einem Quartaner eine außerordentliche Unterstützung zufließen. — Von dem Hochwürdigen Bischöflichen General-Vicariat-Amte ging dem Director unter dem 12. August v. J. die Summe von 57 Thlr., unter dem 29. October v. J. die Summe von 19 Thlr. und unter dem 27. Januar d. J. die Summe von 91 Thlr. 27 Sgg. 8 Pf. zur Unterstützung geeigneter Aspiranten des geistlichen Standes zu.

Allen menschenfreundlichen Wohlthätern der studirenden Jugend unserer Anstalt fühlen wir uns zum ehrerbietigsten und aufrichtigsten Danke verpflichtet.

Vierter Abschnitt.

Oeffentliche Prüfungen.

Die öffentliche Prüfung wird Freitag den 21. August c. von 8 Uhr Morgens und 3 Uhr Nachmittags ab im Lehrzimmer der Quarta in nachfolgender Ordnung gehalten werden:

Vormittag.

Gesang.

Sexta: Lateinisch und Rechnen.

Quinta: Lateinisch und Deutsch.

Quarta: Evang. Religionslehre, Lateinisch und Mathematik.

Tertia: Griechisch und Geschichte.

Nachmittag.

Secunda: Kath. Religionslehre, Lateinisch und Physik.

Prima: Hebräisch, Mathematik und Deutsch.

Sonnabend, den 22. August c., Morgens 8 Uhr: Schlußgottesdienst. Darauf im Lehrzimmer der Quarta: Gesang; Abschiedsrede der Abiturienten und deren Erwiederung; Entlassung der Abiturienten; Gesang. — Censur-Vertheilung.

Das neue Schuljahr wird Montag den 5. October c. Morgens 8 Uhr mit dem üblichen Gottesdienste eröffnet. Die Aufnahme neuer Schüler findet am 1., 2. und 3. October Morgens zwischen 8 und 12 und Nachmittags zwischen 2 und 5 Uhr Statt.

Dr. F. Brüggemann.